

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MÉMOIRE DE MASTER 2

Directeur de Mémoire : Frédéric Le Roux

QUASI-MORPHISMES
SUR LE GROUPE DE TRESSES

Juliette Bavard

Paris, le 27 mai 2013

Introduction

Le but de ce mémoire est la construction de quasi-morphismes non triviaux sur le groupe de tresses. Pour y parvenir, nous allons nous intéresser à la construction de quasi-morphismes sur les groupes agissant sur un espace hyperbolique : en effet, le groupe de tresses peut être vu comme le groupe modulaire d'une certaine surface, et il agit sur le graphe des courbes de cette surface, qui est un espace hyperbolique.

En premier lieu, nous rappellerons quelques énoncés concernant notamment les espaces hyperboliques et le groupe modulaire d'une surface, ainsi que son action sur le graphe des courbes. Nous verrons ensuite une méthode de construction qui permet d'obtenir des quasi-morphismes sur les groupes agissant sur des espaces hyperboliques. Comme nous souhaitons construire un quasi-morphisme qui soit non trivial, il nous restera à montrer que dans le cas du groupe de tresses, notre construction produit des quasi-morphismes non triviaux. Nous chercherons pour cela à établir le critère de non-trivialité suivant :

Critère. *Soit G le groupe modulaire d'une surface non sporadique. S'il existe un élément pseudo-Anosov $\sigma \in G$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, σ^k et σ^{-k} ne sont pas conjugués dans G , alors on peut construire un quasi-morphisme non trivial sur G .*

Pour conclure, nous exhiberons des éléments pseudo-Anosov du groupe de tresses qui vérifient le critère de non-trivialité ci-dessus, obtenant ainsi des quasi-morphismes non triviaux sur ce groupe. Nous verrons ensuite rapidement deux applications de l'existence de quasi-morphismes non triviaux sur le groupe de tresses : nous montrerons que la longueur des commutateurs et la norme de fragmentation sont deux quantités non bornées sur ce groupe.

Remerciements. Je remercie vivement Frédéric Le Roux, dont la grande disponibilité et les nombreux conseils m'ont permis d'entrevoir des objets mathématiques passionnants autour d'un sujet qui m'a vraiment beaucoup plu. Un grand merci également à Maxime Wolff pour son aide et ses nombreuses explications, qui m'ont été très utiles.

Table des matières

I	Groupes agissant sur un espace hyperbolique	4
1	Un peu de géométrie « grossière »	4
1.1	Définitions	4
1.2	Lemme de Morse	5
2	Groupe modulaire et graphe des courbes	12
2.1	Groupe modulaire	12
2.2	Graphe des courbes	12
2.3	Action du groupe modulaire sur le graphe des courbes	14
II	Constructions de quasi-morphismes	15
3	Quasi-morphismes sur le groupe libre	15
3.1	Premières définitions	15
3.2	Construction de Brooks	16
4	Quasi-morphismes sur un groupe agissant sur un espace hyperbolique	17
4.1	Construction de h_w	17
4.2	La fonction h_w est un quasi-morphisme	19
III	Critère de non-trivialité	25
5	Non-retournement	25
6	Un critère de non-retournement	27
6.1	Action faiblement proprement discontinue	28
6.2	Preuve du critère de non-retournement	28
7	Construction du quasi-morphisme non trivial	31
IV	Cas du groupe de tresses	34
8	Le groupe de tresses vu comme groupe modulaire	34
9	Un pseudo-Anosov du groupe de tresses qui vérifie le critère de non-trivialité	35
9.1	Description de $\beta_{m,n}$	35
9.2	L'élément $\beta_{m,n}$ est pseudo-Anosov	37
9.3	L'élément $\beta_{m,n}$ vérifie le critère de non-trivialité	40
10	Deux applications	41
10.1	Longueur des commutateurs	41
10.2	Norme de fragmentation	44

Première partie

Groupes agissant sur un espace hyperbolique

1 Un peu de géométrie « grossière »

On énonce ici quelques éléments basiques de géométrie grossière, issus des notes de D. Calegari [7] et de S. Schleimer [15]. On se place surtout dans le cadre des graphes, car c'est le cas qui va nous intéresser par la suite.

1.1 Définitions

Définition 1. Soit X un graphe connexe. On munit X d'une métrique en décidant que chaque arête est de longueur 1.

- Soient p et q deux points de X . Un **chemin** dans X joignant p à q est l'image du segment $[0, 1]$ par un plongement continu $f : [0, 1] \rightarrow X$ tel que $f(0) = p$ et $f(1) = q$.
- Si γ est un chemin dans X , on notera $|\gamma|$ sa longueur.
- La **distance** entre deux points p et q de X , notée $d(p, q)$, est la borne inférieure des longueurs des chemins de X joignant p à q .
- Si p et q sont deux points d'un espace métrique X et γ un chemin contenant p et q , on notera $\text{long}_\gamma(p, q)$ la longueur du morceau de γ entre p et q .
- On appellera **géodésique** de X toute image γ d'un intervalle de \mathbb{R} par un plongement dans X vérifiant pour tous $p, q \in \gamma$, $\text{long}_\gamma(p, q) = d(p, q)$.

Proposition 1. Si X est un graphe connexe, alors pour tous $p, q \in X$, il existe une géodésique joignant p à q .

Démonstration. Si p et q sont des sommets du graphe, alors tous les chemins joignant p à q sont de longueur entière, donc la distance est réalisée. Sinon, on note α (respectivement β) l'arête contenant p (respectivement q), et p_1 et p_2 (respectivement q_1 et q_2) les sommets de α (respectivement β). Les chemins joignant p à q passent tous par p_1 ou p_2 et q_1 ou q_2 . Ainsi :

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \inf\{|\gamma|, \gamma \text{ chemin joignant } p \text{ à } q\} \\ &= \inf\{\text{long}_\alpha(p, p_i) + \text{long}_\beta(q_j, q) + d(p_i, q_j), (i, j) \in \{1, 2\}^2\}. \end{aligned}$$

Comme les p_i et q_j sont des sommets, la borne inférieure est atteinte. \square

Définition 2 (C -voisinage). Soit X un espace métrique, soit $C \geq 0$ une constante réelle et soient γ_1 et γ_2 deux sous-espaces de X . On dira que γ_1 est **dans un C -voisinage** de γ_2 si pour tout $x_1 \in \gamma_1$, il existe $x_2 \in \gamma_2$ tel que $d(x_1, x_2) \leq C$.

Définition 3 (Espace hyperbolique). Soit $\delta \geq 0$. Un espace métrique X est dit δ -hyperbolique si pour tout triangle géodésique, chacun des trois côtés du triangle est inclus dans la réunion des δ -voisinages des deux autres côtés.

Définition 4 (Quasi-isométrie). Soit $f : Y \rightarrow X$ une application (non nécessairement continue) entre deux espaces métriques et soient $\kappa \geq 1$ et $\epsilon \geq 0$ deux constantes réelles. On dit que f est une (κ, ϵ) -quasi-isométrie si pour tous $x, y \in Y$:

$$\frac{1}{\kappa}d_Y(x, y) - \epsilon \leq d_X(f(x), f(y)) \leq \kappa d_Y(x, y) + \epsilon.$$

Définition 5 (Quasi-géodésique). Une (κ, ϵ) -quasi-géodésique est l'image d'un intervalle I de \mathbb{R} par une (κ, ϵ) -quasi-isométrie.

Si cette image est compacte, c'est un **segment quasi-géodésique**.

Si $I = \mathbb{R}$, c'est une **géodésique bi-infinie**.

Dans ce mémoire, on considèrera uniquement des quasi-géodésiques continues, c'est-à-dire des images d'intervalles de \mathbb{R} par des quasi-isométries continues (en particulier, les segments quasi-géodésiques sont continus).

1.2 Lemme de Morse

On cherche ici à montrer le lemme de Morse (dans le cas de segments quasi-géodésiques), qui nous permettra par la suite de toujours considérer que les segments quasi-géodésiques « restent proches » de vrais segments géodésiques, dans le sens suivant :

Lemme 1 (Lemme de Morse). Soit X un graphe δ -hyperbolique. Pour tous réels $\kappa > 1$ et $\epsilon > 0$, il existe une constante universelle B dépendant uniquement de δ , κ et ϵ , telle que tout segment (κ, ϵ) -quasi-géodésique est dans le B -voisinage de toute géodésique joignant ses extrémités.

Remarque. La preuve donnée ici étant un peu longue (et pas vraiment utile pour la suite du mémoire), on peut admettre le résultat et passer directement à la section 2, page 12...

Démonstration.

Soit $C > 0$. On dit que la configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifie l'hypothèse \mathcal{H}_C (voir figure 1) si :

- γ est un segment (κ, ϵ) -quasi-géodésique (on note a et b ses extrémités),
- γ_0 est une vraie géodésique joignant a à b ,
- p et p' sont deux points sur γ tels que $d(p, \gamma_0) = d(p', \gamma_0) = C$ et $d(r, \gamma_0) \geq C$ pour tout r sur γ entre p et p' ,
- q et q' sont deux points de γ_0 vérifiant $d(p, q) = d(p', q') = C$.

On remarque que si γ sort du C -voisinage de γ_0 , alors les points p, p', q et q' existent toujours, car on a supposé γ continu.

Plan de la preuve. On veut montrer qu'il existe $B > 0$ tel que pour tout $C \geq B$, il n'existe pas de configuration vérifiant \mathcal{H}_C .

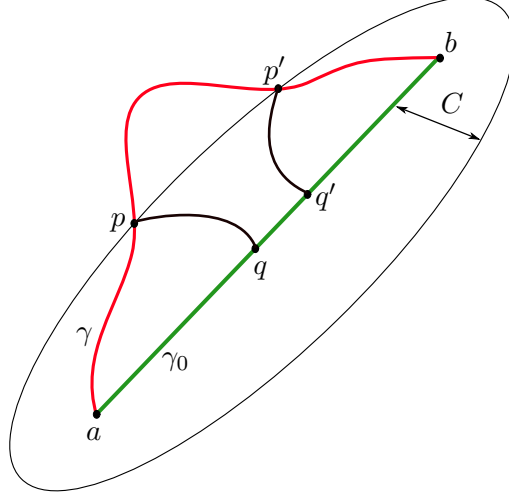


FIGURE 1 – Configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifiant l'hypothèse \mathcal{H}_C

On va montrer (sous-lemme 1) qu'il existe une constante $M > 0$ dépendant uniquement de κ , ϵ et δ , telle que s'il existe $C > 0$ et une configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifiant \mathcal{H}_C et telle que $d(q, q') \geq 40\delta\kappa$, alors $C \leq M$.

On montrera ensuite (sous-lemme 2) qu'il existe une constante $N > 0$ dépendant uniquement de κ , ϵ et δ , telle que s'il existe $C_0 > N$ et une configuration vérifiant \mathcal{H}_{C_0} , alors on a pour $C = \frac{C_0}{2\kappa^3}$ une configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifiant \mathcal{H}_C et telle que $d(q, q') \geq 40\delta\kappa$.

Conclusion. Ainsi, pour $C_0 > \max\{N, 2\kappa^3 M\}$, on ne peut pas avoir de configuration vérifiant \mathcal{H}_{C_0} : sinon, on aurait d'après le sous-lemme 2 un $C = \frac{C_0}{2\kappa^3} > M$ et une configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifiant \mathcal{H}_C et telle que $d(q, q') \geq 40\delta\kappa$, ce qui est absurde d'après le sous-lemme 1.

La constante $B = \max\{N, 2\kappa^3 M\}$, qui dépend uniquement de κ , ϵ et δ , est donc telle que tout segment (κ, ϵ) -quasi-géodésique soit dans le B -voisinage d'une vraie géodésique ayant les mêmes extrémités.

Montrons maintenant ces deux sous-lemmes !

Sous-lemme 1. Soit $M = 20\delta\kappa + 4\delta + \frac{\epsilon}{2\kappa}$.

Si $C > 0$ est tel qu'il existe une configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifiant \mathcal{H}_C et telle que $d(q, q') \geq 40\delta\kappa$, alors $C \leq M$.

Démonstration. Soit donc $C > 0$ et $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ une configuration vérifiant \mathcal{H}_C et telle que $d(q, q') \geq 40\delta\kappa$.

Soient p_i des points sur γ et soient q_i des points sur γ_0 tels que pour tout i :

$$d(p_i, q_i) = d(p_i, \gamma_0) \text{ et } 10\delta \leq d(q_i, q_{i+1}) \leq 20\delta.$$

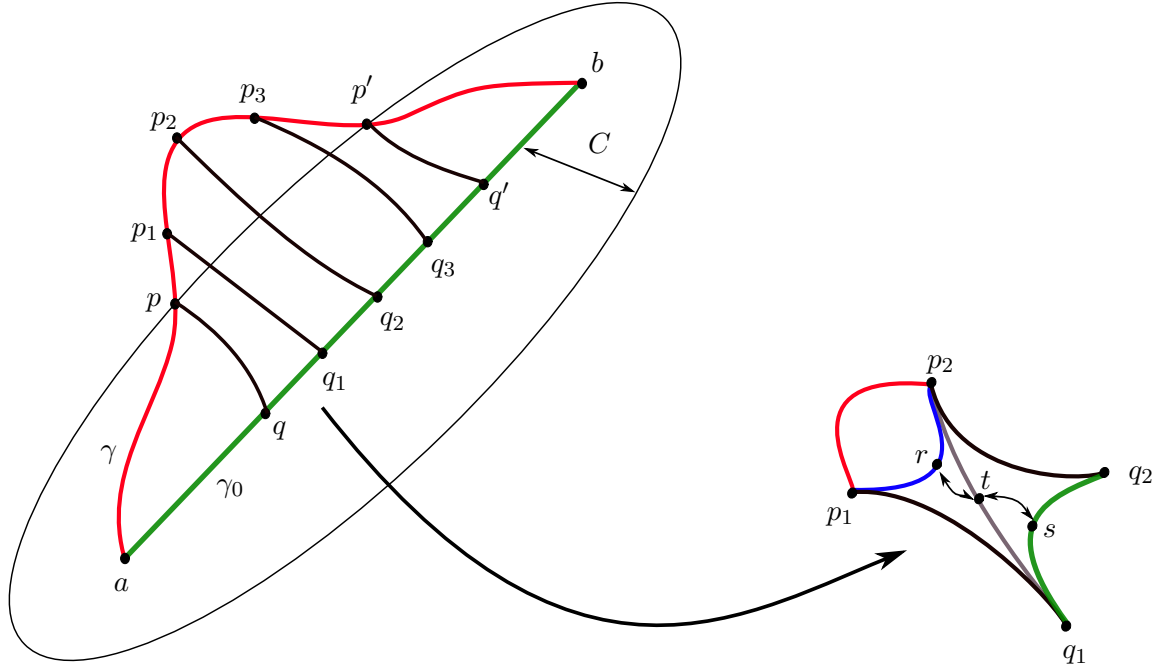


FIGURE 2 – Sous-lemme 1

(a) Montrons l'existence de ces points :

Pour tout r sur γ entre p et p' , on note s un élément de γ_0 réalisant la distance de r à γ_0 . Soit r_1 sur γ entre p et p' tel que $d(p, r_1) = \frac{\delta}{2}$, s_1 un point sur γ_0 réalisant la distance entre r_1 et γ_0 (si $d(p, p') < \frac{\delta}{2}$, on pose $r_1 = p'$, $s_1 = q'$). Pour tout $k \geq 2$ (jusqu'à ce que r_k dépasse p'), on choisit r_k sur γ entre r_{k-1} et p' vérifiant $d(r_{k-1}, r_k) = \frac{\delta}{2}$. Alors les s_k associés (réalisant la distance) sur γ_0 sont tels que $d(s_{k-1}, s_k) \leq 10\delta$:

Considérons le rectangle géodésique $r_{k-1}r_k s_k s_{k-1}$:

Comme $d(r_{k-1}, r_k) \leq \frac{\delta}{2}$, le segment géodésique $[s_{k-1}r_k]$ est dans un $\frac{3\delta}{2}$ -voisinage du segment géodésique $[s_{k-1}r_{k-1}]$. Le segment géodésique $[s_{k-1}s_k]$ est dans un δ -voisinage de $[s_{k-1}r_k] \cup [r_k s_k]$, donc dans un $\frac{5\delta}{2}$ -voisinage de $[s_{k-1}r_{k-1}] \cup [r_k s_k]$.

Soit maintenant u le milieu de $[s_{k-1}s_k]$. Soit $v \in [s_{k-1}r_{k-1}] \cup [r_k s_k]$ tel que $d(u, v) \leq \frac{5\delta}{2}$ (v existe d'après ce qui précède).

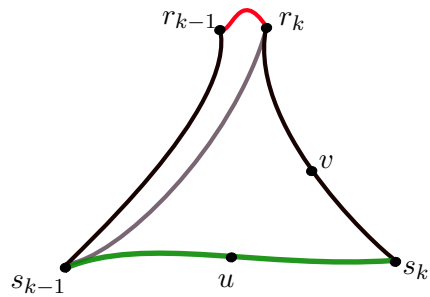


FIGURE 3 – Existence des (p_i, q_i)

- Si $v \in [s_k r_k]$, alors $d(v, s_k) \leq d(v, u)$ car s_k réalise la distance entre r_k et γ_0 , et donc :

$$d(v, s_k) \leq \frac{5\delta}{2}. \quad (1)$$

Par ailleurs :

$$d(s_k, u) \leq d(s_k, v) + d(v, u) \leq d(s_k, v) + \frac{5\delta}{2} \leq 5\delta.$$

D'où

$$d(s_{k-1}, s_k) \leq 10\delta.$$

– Si $v \in [s_{k-1}r_{k-1}]$, la situation est identique.

On choisit donc des s_k tels que $d(s_{k-1}, s_k) \leq 10\delta$. Ainsi on peut ensuite choisir des couples (p_i, q_i) parmi les (r_k, s_k) tels que pour tout i , $10\delta \leq d(q_i, q_{i+1}) \leq 20\delta$.

(b) Montrons à présent que pour tout i :

$$d(p_i, p_{i+1}) \geq 2C - 4\delta. \quad (2)$$

Pour faciliter les notations, on l'écrit pour $i = 1$ (il se passe exactement la même chose pour les autres i). Pour tout i , on note $[p_i q_i]$ un segment géodésique entre p_i et q_i . Soient $[p_1 p_2]$ un segment géodésique entre p_1 et p_2 et $[p_2 q_1]$ un segment géodésique entre p_2 et q_1 (voir figure 2, partie droite). Soit s le milieu de $[q_1 q_2]$ (segment de γ_0 joignant q_1 à q_2 , donc géodésique).

Le triangle $p_2 q_2 q_1$ est géodésique donc il existe $t \in [p_2 q_2] \cup [p_2 q_1]$ tel que $d(t, s) \leq \delta$. En fait $t \in [p_2 q_1]$, car sinon, comme s est le milieu de $[q_1 q_2]$:

$$\begin{aligned} d(q_2, s) &\geq 5\delta \\ \text{Donc : } d(q_2, t) + d(t, s) &\geq 5\delta \\ \text{D'où : } d(q_2, t) &\geq 4\delta \\ \text{Mais alors : } d(p_2, s) &\leq d(p_2, t) + d(t, s) \leq d(p_2, q_2) - 3\delta \end{aligned}$$

Ce qui est impossible par définition des p_i et q_i .

On montre de même en considérant le triangle géodésique $p_1 p_2 q_1$ qu'il existe $r \in [p_1 p_2]$ tel que $d(r, t) \leq \delta$. On a donc $d(r, s) \leq 2\delta$.

$$\begin{aligned} \text{Finalement, on a : } d(p_1, p_2) + 2\delta &\geq d(p_1, s) \geq d(p_1, q_1) \geq C \\ \text{D'où : } d(p_1, r) &\geq C - 2\delta \\ \text{Et de même : } d(p_2, r) &\geq C - 2\delta \\ \text{Donc : } d(p_1, p_2) = d(p_1, r) + d(r, p_2) &\geq 2C - 4\delta. \end{aligned}$$

Pour tout i , on a donc :

$$d(p_i, p_{i+1}) \geq 2C - 4\delta.$$

(c) Fin de la preuve du sous-lemme 1.

De l'inégalité (2), on déduit immédiatement que :

$$\text{long}_\gamma(p, p') \geq \frac{d(q, q')}{20\delta} (2C - 4\delta). \quad (3)$$

Par ailleurs :

$$d(p, p') \leq 2C + d(q, q'). \quad (4)$$

Comme γ est une (κ, ϵ) -quasi-géodésique, on a aussi l'inégalité :

$$\text{long}_\gamma(p, p') \leq \kappa d(p, p') + \epsilon. \quad (5)$$

Finalement, en combinant les inégalités (3), (4) et (5), on obtient :

$$d(q, q') \frac{2C - 4\delta}{20\delta} \leq \kappa(2C + d(q, q')) + \epsilon.$$

D'où :

$$C \frac{d(q, q') - 20\delta\kappa}{10\delta} \leq \left(\kappa + \frac{1}{5}\right) d(q, q') + \epsilon.$$

D'où, comme $d(q, q') \geq 40\delta\kappa$:

$$\begin{aligned} C &\leq \frac{10\delta}{d(q, q') - 20\delta\kappa} (40\delta\kappa^2 + 8\delta\kappa + \epsilon) \\ &\leq \frac{1}{2\kappa} (40\delta\kappa^2 + 8\delta\kappa + \epsilon) \\ &\leq 20\delta\kappa + 4\delta + \frac{\epsilon}{2\kappa}. \end{aligned} \quad \square$$

Remarque. *S'il existe une configuration $(\gamma, \gamma_0, p_0, p'_0, q_0, q'_0)$ vérifiant \mathcal{H}_{C_0} pour un C_0 donné, alors cette configuration nous donne une configuration vérifiant \mathcal{H}_C pour tout $C \leq C_0$ positif : en effet, on peut considérer p le premier point de γ avant p_0 tel que $d(p, \gamma_0) = C$, et p' le premier point de γ après p'_0 tel que $d(p', \gamma_0) = C$. On choisit alors q et q' deux points de γ_0 vérifiant :*

$$d(p, q) = d(p', q') = C.$$

Pour tout r sur γ entre p et p' , on a $d(r, \gamma_0) \geq C$ par construction, donc la configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ ainsi construite vérifie \mathcal{H}_C .

Sous-lemme 2. *Soit $N = (\kappa + 1)(40\delta\kappa^2 + 3\epsilon)$.*

S'il existe $C_0 > N$ et une configuration vérifiant \mathcal{H}_{C_0} , on a alors pour $C = \frac{C_0}{2\kappa^3}$ une configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifiant \mathcal{H}_C et telle que $d(q, q') \geq 40\delta\kappa$.

Démonstration. Soit $C_0 > N$ et une configuration $(\gamma, \gamma_0, p_0, p'_0, q_0, q'_0)$ vérifiant \mathcal{H}_{C_0} . D'après la remarque (1.2), il existe une configuration vérifiant \mathcal{H}_C pour $C = \frac{C_0}{2\kappa^3}$. Par l'absurde, on suppose que toutes les configurations $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifiant \mathcal{H}_C sont telles que $d(q, q') < 40\delta\kappa$.

Soit $C_u = \frac{C_0}{2}$.

Idée. On va construire des points p_u, p'_u, p et p' vérifiant par construction :

$$\text{long}_\gamma(p_u, p'_u) \leq \text{long}_\gamma(p, p').$$

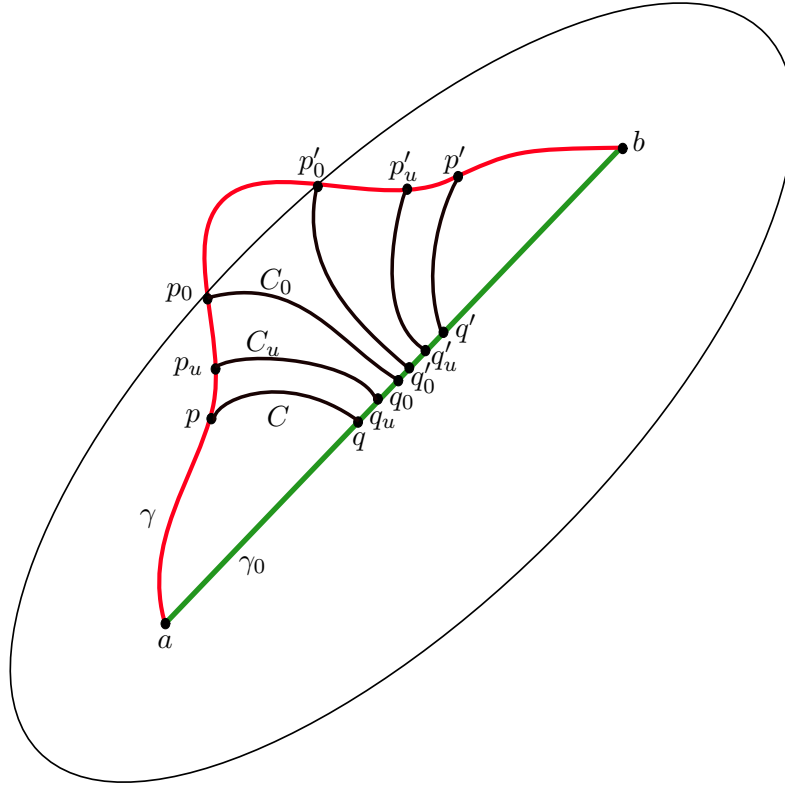


FIGURE 4 – Sous-lemme 2 : on part d’une configuration vérifiant \mathcal{H}_{C_0}

Pour obtenir une contradiction, on va montrer qu’on a aussi :

$$\text{long}_\gamma(p_u, p'_u) > \text{long}_\gamma(p, p').$$

Pour montrer cette inégalité, on va minorer $\text{long}_\gamma(p_u, p'_u)$ par $2\kappa^2 C - 2\epsilon$, et on va majorer $\text{long}_\gamma(p, p')$ par $2\kappa C + 40\delta\kappa^2 + \epsilon$, qui est strictement plus petit que $2\kappa^2 C - 2\epsilon$, car on a en fait choisi N pour que cette inégalité soit vérifiée.

(a) Construction de p_u et p'_u . Soient p_u le premier point de γ avant p_0 tel que $d(p_u, \gamma_0) = C_u$, et p'_u le premier point de γ après p'_0 tel que $d(p'_u, \gamma_0) = C_u$ (voir figure 4). On note q_u et q'_u deux points de γ_0 vérifiant :

$$d(p_u, q_u) = d(p'_u, q'_u) = C_u.$$

On a : $d(p_0, q_0) \leq d(p_0, p_u) + d(p_u, q_0)$ (inégalité triangulaire)

D’où : $C_0 \leq d(p_0, p_u) + C_u$ (q_u minimise la distance)

Donc : $d(p_u, p_0) \geq C_0 - C_u$
 $\geq C_u$ (car $C_0 = 2C_u$).

Par ailleurs, on a :

$$\text{long}_\gamma(p_u, p_0) \geq \frac{1}{\kappa} d(p_u, p_0) - \epsilon.$$

D'après ce qui précède, on a donc :

$$\text{long}_\gamma(p_u, p_0) \geq \frac{C_u}{\kappa} - \epsilon.$$

De même, on montre que :

$$\text{long}_\gamma(p'_u, p'_0) \geq \frac{C_u}{\kappa} - \epsilon.$$

Et donc finalement :

$$\begin{aligned} \text{long}_\gamma(p_u, p'_u) &\geq \text{long}_\gamma(p_u, p_0) + \text{long}_\gamma(p'_0, p'_u) \quad (\text{voir figure...}) \\ &\geq \frac{2C_u}{\kappa} - 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc, par définition de C_u et C :

$$\text{long}_\gamma(p_u, p'_u) \geq 2\kappa^2 C - 2\epsilon. \quad (6)$$

(b) Construction de p et p' . Soient maintenant p le premier point de γ avant p_u tel que $d(p, \gamma_0) = C$, et p' le premier point de γ après p'_u tel que $d(p', \gamma_0) = C$ (voir figure 4). On note q et q' deux points de γ_0 vérifiant :

$$d(p, q) = d(p, q') = C.$$

La configuration $(\gamma, \gamma_0, p, p', q, q')$ vérifie \mathcal{H}_C . Par hypothèse, on a donc :

$$d(q, q') < 40\delta\kappa. \quad (7)$$

Par ailleurs, comme γ est un segment (κ, ϵ) -quasi-géodésique :

$$\text{long}_\gamma(p, p') \leq \kappa d(p, p') + \epsilon. \quad (8)$$

On a de plus, en appliquant l'inégalité triangulaire (voir figure) :

$$d(p, p') \leq 2C + d(q, q'); \quad (9)$$

D'où finalement, en combinant (7), (8) et (9) :

$$\text{long}_\gamma(p, p') \leq 2\kappa C + 40\delta\kappa^2 + \epsilon. \quad (10)$$

(c) Conclusion du sous-lemme 2. On a supposé :

$$C = \frac{C_0}{2\kappa^3} > \frac{(\kappa + 1)(40\delta\kappa^2 + 3\epsilon)}{2\kappa^3} = \frac{40\delta\kappa^2 + 3\epsilon}{2(\kappa^2 - \kappa)}.$$

Ce qui implique :

$$2\kappa C + 40\delta\kappa^2 + \epsilon < 2\kappa^2 C - 2\epsilon. \quad (11)$$

Finalement, (6), (10) et (11) nous donne :

$$\text{long}_\gamma(p_u, p'_u) \geq 2\kappa^2 C - 2\epsilon > 2\kappa C + 40\delta\kappa^2 + \epsilon \geq \text{long}_\gamma(p, p').$$

D'où la contradiction, car par construction on a :

$$\text{long}_\gamma(p_u, p'_u) \leq \text{long}_\gamma(p, p').$$

□

Remarque. On a donc $B = \max\{40\delta\kappa^4 + 8\delta\kappa^3 + \epsilon\kappa^2, 40\delta\kappa^3 + 40\delta\kappa^2 + 3\epsilon\kappa + 3\epsilon\}$.

2 Groupe modulaire et graphe des courbes

On donne ici rapidement les énoncés concernant le groupe modulaire d'une surface et son action sur le graphe des courbes qui nous seront utiles par la suite (issus principalement de [9] et [15]).

2.1 Groupe modulaire

Soit S une surface orientée de genre g , éventuellement à bords et à pointes.

Définition 6. *Le groupe modulaire de S , que l'on notera $MCG(S)$ (comme Mapping Class Group), est le groupe des classes d'isotopies d'homéomorphismes de S préservant l'orientation (on considère les homéomorphismes de S qui valent l'identité sur les éventuelles composantes de bords de S , et qui laissent stable l'ensemble des éventuelles pointes de S).*

2.2 Graphe des courbes

Définition 7. *Une courbe fermée simple essentielle sur une surface S est l'image α du cercle par un plongement dans S , et telle qu'aucune composante connexe de $S - \alpha$ ne soit homéomorphe à un disque ou un anneau (voir figure 5).*

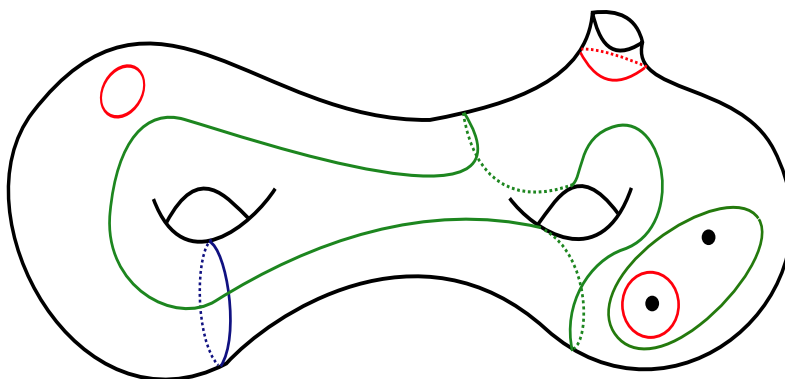


FIGURE 5 – Exemples de courbes fermées simples sur la surface de genre 2 ayant une composante de bord et deux pointes : en rouge, des courbes non essentielles ; en vert et bleu, des courbes essentielles.

Définition 8. *Le graphe des courbes de S , que l'on notera $\mathcal{G}(S)$, est un graphe défini comme suit :*

- Les sommets correspondent aux classes d'isotopie de courbes fermées simples essentielles de S .
- On joint deux de ces points par une arête si l'on peut choisir deux représentants des classes d'isotopies de courbes correspondantes qui ne s'intersectent pas.

En décidant que chaque arête est de longueur 1, on munit naturellement $\mathcal{G}(S)$ d'une métrique.

Pour un petit nombre de surfaces, dites surfaces sporadiques, le graphe des courbes est vide ou non connexe. On ne s'intéressera pas à ces surfaces.

Définition 9. Soit S une surface de genre g ayant n pointes ou composantes de bords. Si $3g + n \geq 5$, on dira que S est **non sporadique**.

Proposition 2. Si S est une surface non sporadique, alors son graphe des courbes $\mathcal{G}(S)$ est connexe.

Démonstration. Soit S une surface non sporadique, et soient $a, b \in \mathcal{G}(S)$. Quitte à joindre les points considérés à un sommet par un chemin le long de l'arête correspondante, on peut supposer que a et b sont des sommets. On veut trouver des sommets $c_1 = a, c_2, \dots, c_k = b$ tels que $i(c_j, c_{j+1}) = 0$, où $i(x, y)$ est le nombre minimal de points d'intersection entre deux représentants de x et y . Par récurrence sur $i(a, b)$:

- Si $i(a, b) = 0$: ok.
- Si $i(a, b) = 1$: on choisit α et β deux représentants de a et b respectivement, ayant un unique point d'intersection. On considère alors un petit voisinage de $\alpha \cup \beta$: c'est une sous-surface de S , qui a la topologie d'un tore privé d'un disque. Le bord de cette sous-surface est une courbe simple essentielle de S , sinon S est un tore ou un tore épointé, et alors S est sporadique. Soit c la classe d'isotopie de ce bord : $i(a, c) = i(c, b) = 0$ donc la suite de sommets a, c, b convient.
- Si $i(a, b) \geq 2$: trouvons c tel que $i(a, c) < i(a, b)$ et $i(c, b) < i(a, b)$. Soient toujours α et β deux représentants de a et b qui minimisent le nombre de points d'intersection. On considère deux points d'intersection consécutifs le long de β et on oriente α de telle sorte qu'on se retrouve dans l'une des deux situations de la figure 6.

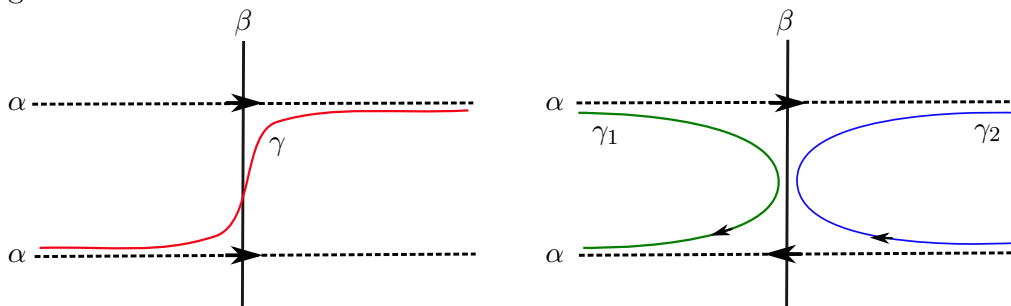


FIGURE 6 – Étude des deux situations possibles.

1. Dans la première situation (à gauche), on choisit γ comme sur la figure (qui suit α en dehors de la figure). Alors α et γ ont un unique point d'intersection, donc γ est essentielle, et si on note c la classe d'isotopie de γ , on a $i(a, c) = 1$ et $i(c, b) \leq i(a, b) - 1$.
2. Dans la deuxième situation, on considère les deux courbes γ_1 et γ_2 de la figure (et qui suivent α en dehors de la figure). L'une d'entre elles au moins

est essentielle (sinon S est sporadique ou bien α et β ne sont pas en position minimale), on note c sa classe d'isotopie, et on a alors $i(c, b) < i(a, b)$ et $i(c, a) < i(a, b)$.

On a donc montré que le graphe des courbes de S est connexe. □

On admet le résultat suivant, dû à H. Masur et Y. Minsky (voir [13], théorème 1.1).

Théorème 1 (Hyperbolicité du graphe des courbes). *Soit S une surface non sporadique. Alors le graphe des courbes $\mathcal{G}(S)$ est un espace métrique δ -hyperbolique, où δ dépend de S .*

2.3 Action du groupe modulaire sur le graphe des courbes

Le groupe modulaire d'une surface donnée agit naturellement sur son graphe des courbes :

- On définit d'abord l'action sur les sommets du graphe : si f est un élément du groupe modulaire et α une classe d'isotopie de courbes simples essentielles, $f\alpha$ est la classe d'isotopie de $\tilde{f}\tilde{\alpha}$, où \tilde{f} et $\tilde{\alpha}$ sont des représentants quelconques de f et α respectivement. On remarque que cette action préserve les distances entre les sommets (si deux classes de courbes α et β sont à distance 1, alors elles ont deux représentants qui ne s'intersectent pas, et leurs images par un homéomorphisme ne s'intersectent pas non plus).
- On étend ensuite cette action aux arêtes du graphe des courbes en décrétant que chaque élément du groupe modulaire agit par isométrie sur ce graphe.

On a donc un groupe qui agit (par isométrie) sur un espace hyperbolique.

Classification de Nielsen-Thurston. On distingue trois différents types d'éléments dans le groupe modulaire d'une surface :

1. **Périodique** : élément qui possède une puissance triviale.
2. **Réductible** : élément qui laisse stable un ensemble fini de classes d'isotopies de courbes.
3. **Pseudo-Anosov** : élément qui n'est ni réductible, ni périodique.

Théorème de Bowditch.

On admet le théorème suivant, dû à B. Bowditch (voir [4], théorème 1.4).

Théorème 2 (Bowditch). *Soit G le groupe modulaire d'une surface non sporadique S . Il existe $b \in \mathbb{N}$ (dépendant uniquement de S) tel que si σ est un élément pseudo-Anosov de G , alors σ^b préserve une géodésique bi-infinie de $\mathcal{G}(S)$, et agit dessus par translation.*

Deuxième partie

Constructions de quasi-morphismes

On s'inspire en grande partie du livre *SCL* de Danny Calegari ([6]).

3 Quasi-morphismes sur le groupe libre

3.1 Premières définitions

Définition 10. *Un quasi-morphisme sur un groupe G est une fonction $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une constante $D(\phi) \geq 0$ qui vérifie, pour tous a et b dans G :*

$$|\phi(ab) - \phi(a) - \phi(b)| \leq D(\phi).$$

La valeur minimale de $D(\phi)$ est appelé **défaut** de ϕ .

Les premiers exemples de quasi-morphismes sont les morphismes ($D(\phi) = 0$) et les fonctions bornées. Les quasi-morphismes qui nous intéressent sont ceux qui ne sont ni des morphismes, ni des fonctions bornées, ce qui nous amène à la définition suivante :

Définition 11. *Un quasi-morphisme ϕ est dit **non trivial** si ϕ n'est pas la somme d'un morphisme et d'une fonction bornée.*

Définition 12. *Un quasi-morphisme est dit **homogène** s'il vérifie $\phi(a^n) = n\phi(a)$ pour tout $a \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.*

En particulier, un quasi-morphisme homogène non nul est non borné. On a le lemme suivant (démontré dans ([6]), page 18) :

Proposition 3. *Soit ϕ un quasi-morphisme sur un groupe G . Pour tout $a \in G$, on définit :*

$$\tilde{\phi}(a) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(a^n)}{n}.$$

Cette limite existe et définit un quasi-morphisme homogène, que l'on appelle **homogénéisé** de ϕ .

Remarque. *Si ϕ est trivial, alors ϕ s'écrit de manière unique comme $\phi = \mu + \nu$, où μ est un morphisme et ν une fonction bornée. On a alors que l'homogénéisé de ϕ est égal à μ . En effet, pour tout $a \in G$:*

$$\tilde{\phi}(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mu(a^n)}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\nu(a^n)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(a) = \mu(a).$$

Pour vérifier qu'un quasi-morphisme ϕ est non trivial, on pourra donc vérifier que son homogénéisé n'est pas un morphisme.

3.2 Construction de Brooks

On va voir ici comment construire des quasi-morphismes non triviaux sur le groupe libre (construction due à R. Brooks, en 1981, dans [5]). On généralisera ensuite cette construction aux groupes agissant sur un espace hyperbolique.

Soit G un groupe libre sur un système symétrique de générateurs S , et soit w un mot réduit (dans S).

Définition 13. *La fonction de comptage $C_w : G \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application qui associe à tout $g \in G$ l'entier $C_w(g)$ correspondant au nombre maximal de copies disjointes de w dans la forme réduite de g .*

A partir de cette fonction de comptage, on peut définir les quasi-morphismes de Brooks, ou quasi-morphismes de comptage sur les groupes libres.

Définition 14. *Un quasimorphisme de Brooks est une fonction $H_w : G \rightarrow \mathbb{Z}$ définie pour tout $g \in G$ par :*

$$H_w(g) := C_w(g) - C_{w^{-1}}(g).$$

Remarque. *Il s'agit en fait des « petits » quasi-morphismes de Brooks. On peut définir de la même manière des « grands » quasi-morphismes de Brooks en comptant le nombre de copies de w dans la forme réduite de g , et non le nombre de copies disjointes.*

Proposition 4. *La fonction H_w que l'on vient de définir est un quasi-morphisme.*

Cette proposition est un cas particulier de la proposition 5 ci-dessous, mais la démonstration est beaucoup plus courte, nous la présentons donc ici.

Démonstration. Montrons l'existence de D tel que pour tous $a, b \in G$:

$$|H_w(a) + H_w(b) - H_w(ab)| \leq D.$$

Soient $a, b \in G$. Soit y le plus long mot réduit tel que les formes réduites de a et b s'écrivent $a = xy$ et $b = y^{-1}z$, où x et z sont deux mots éventuellement vides. Ainsi la forme réduite de ab est xz . On a alors :

$$\begin{aligned} C_w(x) + C_w(y) &\leq C_w(a) \leq C_w(x) + C_w(y) + 1 \\ C_w(y^{-1}) + C_w(z) &\leq C_w(b) \leq C_w(y^{-1}) + C_w(z) + 1 \\ C_w(x) + C_w(z) &\leq C_w(ab) \leq C_w(x) + C_w(z) + 1 \end{aligned}$$

Mais aussi :

$$\begin{aligned} -C_{w^{-1}}(x) - C_{w^{-1}}(y) &\leq -C_{w^{-1}}(a) \leq -C_{w^{-1}}(x) - C_{w^{-1}}(y) + 1 \\ -C_{w^{-1}}(y^{-1}) - C_{w^{-1}}(z) &\leq -C_{w^{-1}}(b) \leq -C_{w^{-1}}(y^{-1}) - C_{w^{-1}}(z) + 1 \\ -C_{w^{-1}}(x) - C_{w^{-1}}(z) &\leq -C_{w^{-1}}(ab) \leq -C_{w^{-1}}(x) - C_{w^{-1}}(z) + 1 \end{aligned}$$

Comme $C_w(y) = C_{w^{-1}}(y^{-1})$, on en déduit :

$$|H_w(a) + H_w(b) - H_w(ab)| \leq 3.$$

Ainsi, $D = 3$ convient (on remarque que D ne dépend pas de w). □

Remarque. Si la forme réduite de w contient au moins deux lettres distinctes, alors le quasi-morphisme H_w ainsi défini est non trivial. En effet, son homogénéisé \tilde{H}_w n'est pas un morphisme :

Soit a la première lettre de la forme réduite de w : il existe x non vide tel que $w = ax$. Alors $\tilde{H}_w(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_w(a^n)}{n} = 0$. Par ailleurs $H_w(x^n) = 0$, sauf si la forme réduite de x se termine par a , auquel cas $H_w(x^n) = \frac{n}{2}$ (pour n pair, $\frac{n-1}{2}$ si n impair). Ainsi $\tilde{H}_w(x) \leq \frac{1}{2}$. Comme $\tilde{H}_w(ax) = \tilde{H}_w(w) = 1$, on voit que \tilde{H}_w n'est pas un morphisme.

4 Quasi-morphismes sur un groupe agissant sur un espace hyperbolique

Les quasi-morphismes de Brooks ne sont pas bien définis sur un groupe quelconque défini par générateurs et relations : en effet, l'écriture des mots n'étant pas nécessairement unique, cela n'a pas de sens de « compter le nombre de copies d'un mot dans l'écriture d'un autre ». Cependant, D. Epstein et K. Fujiwara ont proposé en 1997 (dans [8]) une généralisation de la construction de Brooks aux groupes hyperboliques (agissant sur leur graphe de Cayley). Cette construction fut elle même étendue en 1998 par K. Fujiwara à tous les groupes agissant sur des espaces hyperboliques (dans [10]). Nous allons décrire ici cette dernière construction.

4.1 Construction de h_w

Notations. Dans toute la suite, G est un groupe agissant par isométries sur un graphe δ -hyperbolique X (par exemple un groupe hyperbolique agissant sur son graphe de Cayley, ou – et c'est le cas qui va nous intéresser – le groupe modulaire d'une surface agissant sur le graphe des courbes de cette surface).

On notera w un chemin orienté fini joignant deux sommets de X et w^{-1} le même chemin muni de l'orientation inverse.

Définition 15. Une copie de w est un translaté $\sigma(w)$, où $\sigma \in G$.

Si on fixe un point base $p \in X$, alors pour tout $\sigma \in G$, il existe une géodésique γ joignant p à $\sigma(p)$ (d'après la proposition 1). En général, γ n'est pas unique, donc on ne peut pas définir les quasi-morphismes de comptage en comptant le nombre de copies disjointes de w dans γ . Pour résoudre ce problème, on va considérer une fonction qui prend en compte tous les chemins possibles entre p et $\sigma(p)$.

Notations. Pour tout chemin α orienté dans X , on rappelle que l'on note $|\alpha|$ la longueur de α , et on notera $|\alpha|_w$ le nombre de copies disjointes de w dans α .

Définition 16 (Fonction de comptage). Soit $p \in X$.

La fonction de comptage $c_w : G \rightarrow \mathbb{N}$ est définie pour tout $\sigma \in G$ par :

$$c_w(\sigma) := d(p, \sigma(p)) - \inf_{\gamma} (|\gamma| - |\gamma|_w),$$

où la borne inférieure est prise sur tous les chemins orientés γ de X joignant p à $\sigma(p)$.

Définition 17 (Chemin réalisant). *Comme $|\gamma| - |\gamma|_w$ est un entier pour tout γ joignant p à $\sigma(p)$, la borne inférieure considérée dans la définition de la fonction de comptage c_w est atteinte. On appelle tout chemin réalisant cette borne inférieure un **chemin réalisant**.*

Définition 18 (Quasi-morphisme de comptage). *Le quasi-morphisme de comptage $h_w : G \rightarrow \mathbb{Z}$ est défini pour tout $\sigma \in G$ par :*

$$h_w(\sigma) := c_w(\sigma) - c_{w^{-1}}(\sigma).$$

Remarque. *A priori, c_w dépend du point p choisi dans la définition 16, mais \tilde{h}_w , l'homogénéisé du quasi-morphisme h_w ainsi défini, n'en dépend pas.*

En effet, soit q un autre point. On note $c_{w,p}$ (respectivement $c_{w,q}$) la fonction de comptage définie à partir de p (respectivement q), et $h_{w,p}$ (respectivement $h_{w,q}$) le quasi-morphisme défini à partir de p (respectivement q). Soit $\sigma \in G$. On note γ_p (respectivement γ_q , γ'_p et γ'_q) un chemin réalisant la borne inférieure dans la définition de $c_{w,p}(\sigma)$ (respectivement $c_{w,q}(\sigma)$, $c_{w^{-1},p}(\sigma)$ et $c_{w^{-1},q}(\sigma)$). On a alors :

$$\begin{aligned} h_{w,p}(\sigma) &= |\gamma'_p| - |\gamma'_p|_w - (|\gamma_p| - |\gamma_p|_w) \\ h_{w,q}(\sigma) &= |\gamma'_q| - |\gamma'_q|_w - (|\gamma_q| - |\gamma_q|_w) \end{aligned}$$

On note $l = d(p, q)$. Comme g agit par isométrie, on a aussi $l = d(\sigma p, \sigma q)$. Comme γ_p réalise la borne inférieure, en considérant un chemin qui joint p à q , coïncide avec γ_q entre q et σq puis joint σq à σp , on obtient :

$$|\gamma_p| - |\gamma_p|_w \leq |\gamma_q| + 2l - |\gamma_q|_w.$$

De même, on a :

$$|\gamma_q| - |\gamma_q|_w \leq |\gamma_p| + 2l - |\gamma_p|_w.$$

On en déduit :

$$|\gamma_p| - |\gamma_p|_w - 2l \leq |\gamma_q| - |\gamma_q|_w \leq |\gamma_p| - |\gamma_p|_w + 2l.$$

On a aussi :

$$|\gamma'_p| - |\gamma'_p|_w - 2l \leq |\gamma'_q| - |\gamma'_q|_w \leq |\gamma'_p| - |\gamma'_p|_w + 2l.$$

D'où finalement :

$$h_{w,p}(\sigma) - 4l \leq h_{w,q}(\sigma) \leq h_{w,p}(\sigma) + 4l.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\sigma \in G$, elle l'est en particulier pour σ^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a ainsi :

$$\frac{h_{w,p}(\sigma^n) - 4l}{n} \leq \frac{h_{w,q}(\sigma^n)}{n} \leq \frac{h_{w,p}(\sigma^n) + 4l}{n}.$$

D'où, en passant à la limite, on obtient $\tilde{h}_{w,q}(\sigma) = \tilde{h}_{w,p}(\sigma)$.

4.2 La fonction h_w est un quasi-morphisme

Proposition 5. *La fonction h_w que l'on vient de définir est un quasi-morphisme.*

Pour montrer cette proposition, on utilise le lemme de Morse (1) et les deux lemmes (2 et 3) suivants :

Lemme 2. *Si $|w| \geq 2$, alors tout chemin réalisant pour c_w est une $(2, 4)$ -quasi-géodésique.*

Remarque. *Notons que si $|w| = 1$, alors la borne inférieure dans la définition de c_w peut être réalisée par une géodésique.*

Démonstration. Soit γ un chemin réalisant et soient q et r deux points sur γ . On appelle α le morceau de γ joignant q à r , et on considère une géodésique β joignant q à r . Soit γ' le chemin qui coïncide avec γ entre p et q et entre r et $\sigma(p)$, et avec β entre q et r (voir figure 7). Comme q et r sont situés sur au plus une copie de w dans γ chacun, β intersecte au plus deux copies disjointes de w dans γ .

Ainsi on a :

$$|\gamma'|_w \geq |\gamma|_w - 2 - |\alpha|_w.$$

Par ailleurs, on a supposé $|w| \geq 2$, d'où :

$$|\gamma'|_w \geq |\gamma|_w - 2 - \frac{|\alpha|}{2}.$$

D'autre part, comme γ est un chemin réalisant, on a $|\gamma'| - |\gamma'|_w \geq |\gamma| - |\gamma|_w$, et on sait aussi que $|\gamma'| = |\gamma| - |\alpha| + |\beta|$. On en déduit :

$$|\beta| \geq \frac{|\alpha|}{2} - 2.$$

Et ainsi, pour tous q et r sur γ , on a :

$$\frac{1}{2}d(q, r) - 4 \leq \text{long}_\gamma(q, r) \leq 2d(q, r) + 4.$$

Donc γ est une $(2, 4)$ -quasi-géodésique. \square

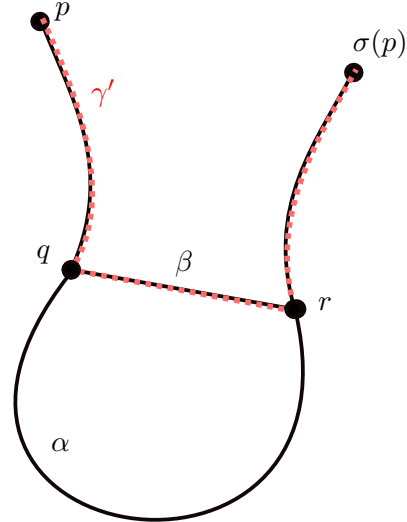


FIGURE 7 – Découpage de γ

Notation : Dans toute la suite, on considèrera toujours les $(2, 4)$ -quasi-géodésiques, et on notera B la constante donnée par le lemme de Morse pour $(\kappa, \epsilon, \delta) = (2, 4, \delta)$, où δ est la constante d'hyperbolicité de l'espace X que l'on considère (d'après la remarque 1.2, on a $B = 704\delta + 16$).

Définition 19. *Si p et q sont deux sommets de X et w un chemin joignant deux sommets de X , on définit :*

$$c_w(p, q) = d(p, q) - \inf_\gamma (|\gamma| - |\gamma|_w),$$

où la borne inférieure est prise sur tous les chemins orientés γ de X joignant p à q .

De même, on notera :

$$h_w(p, q) := c_w(p, q) - c_{w^{-1}}(p, q).$$

Lemme 3. Soit toujours G un groupe agissant sur un graphe δ -hyperbolique X , on note encore B la constante de Morse associée aux valeurs $(2, 4, \delta)$ et w un chemin orienté joignant deux sommets de X . On a alors :

1. Pour tous $p, q \in X$: $c_w(p, q) = c_{w^{-1}}(q, p)$.
2. Pour tous $p, q, q' \in X$: $|c_w(p, q) - c_w(p, q')| \leq d(q, q')$.
3. Si q est sur un chemin réalisant entre deux points p et r de X , alors :

$$c_w(p, r) - 1 \leq c_w(p, q) + c_w(q, r) \leq c_w(p, r) + 2B.$$

Démonstration.

(1) Si γ est un chemin réalisant entre p et q , alors γ^{-1} est un chemin réalisant entre q et p , et réciproquement, d'où le résultat.

(2) Quitte à échanger q et q' , on peut supposer $d(p, q') \geq d(p, q)$. Soient α un chemin réalisant entre p et q et β un chemin réalisant entre p et q' . Soit γ un chemin reliant p à q' tel que γ passe par q , γ coïncide avec α entre p et q et γ est géodésique entre q et q' . On a alors :

$$|\beta| - |\beta|_w \leq |\gamma| - |\gamma|_w \leq d(q, q') + |\alpha| - |\alpha|_w.$$

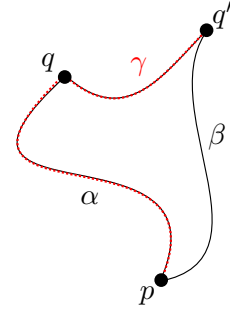


FIGURE 8 – α , β et γ .

On en déduit :

$$\begin{aligned} c_w(p, q) - c_w(p, q') &= d(p, q) - |\alpha| + |\alpha|_w - d(p, q') + |\beta| - |\beta|_w \\ &\leq d(p, q) - d(p, q') + d(q, q') \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$c_w(p, q) - c_w(p, q') - d(p, q) + d(p, q') \leq d(q, q'). \quad (12)$$

Si on écrit la même chose avec γ' reliant p à q en passant par q' , on obtient :

$$c_w(p, q') - c_w(p, q) \leq d(p, q') - d(p, q) + d(q, q').$$

D'où :

$$c_w(p, q) - c_w(p, q') + d(p, q') - d(p, q) \geq -d(q, q'). \quad (13)$$

En combinant (12) et (13), on obtient :

$$|c_w(p, q) - c_w(p, q') - d(p, q) + d(p, q')| \leq d(q, q').$$

Comme on a supposé $d(p, q') \geq d(p, q)$, on en déduit :

$$|c_w(p, q) - c_w(p, q')| \leq d(q, q').$$

(3) On considère q sur un chemin réalisant γ entre p et r . On appelle α le morceau de γ entre p et q et β celui entre q et r . Soient α_0 un chemin réalisant entre p et q et β_0 un chemin réalisant entre q et r . On a :

$$\begin{aligned}
c_w(p, q) + c_w(q, r) &= d(p, q) + d(q, r) - |\alpha_0| + |\alpha_0|_w - |\beta_0| + |\beta_0|_w \\
&\geq d(p, q) + d(q, r) - |\alpha| + |\alpha|_w - |\beta| + |\beta|_w \\
&\quad (\text{par définition des chemins réalisants}) \\
&\geq d(p, r) - |\gamma| + |\gamma|_w - 1 \\
&\quad (\text{car } q \text{ intersecte au plus une copie de } w) \\
&\geq c_w(p, r) - 1.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme γ est un chemin réalisant, on a :

$$d(p, r) - |\gamma| + |\gamma|_w \geq d(p, r) - |\alpha_0 \cup \beta_0| + |\alpha_0 \cup \beta_0|_w,$$

où $\alpha_0 \cup \beta_0$ est la concaténation de α_0 et β_0 .

On en déduit :

$$d(p, r) - |\gamma| + |\gamma|_w \geq d(p, r) - (|\alpha_0| + |\beta_0|) + |\alpha_0|_w + |\beta_0|_w. \quad (14)$$

(Si jamais q intersecte une copie de w sur $\alpha_0 \cup \beta_0$, alors $|\alpha_0 \cup \beta_0|_w = |\alpha_0|_w + |\beta_0|_w + 1$, sinon on a $|\alpha_0 \cup \beta_0|_w = |\alpha_0|_w + |\beta_0|_w$: dans les deux cas, l'inégalité est vraie.)

En utilisant une nouvelle fois le fait que γ est un chemin réalisant, on a d'après le lemme 2, que γ est une $(2, 4)$ -quasi-géodésique. D'après le lemme de Morse (1), on sait alors que γ reste dans un B -voisinage de tout segment géodésique joignant p à r . Soit γ' un tel segment géodésique, et soit s un point de γ' tel que $d(q, s) \leq B$ (existe car γ est dans un B -voisinage de γ'). On a alors :

$$\begin{aligned}
d(p, q) &\leq d(p, s) + d(s, q) \\
d(q, r) &\leq d(q, s) + d(s, r) \\
d(q, s) &\leq B && \text{par définition de } s \\
d(p, r) &= d(p, s) + d(s, r) && \text{car } \gamma' \text{ est géodésique}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$d(p, q) + d(q, r) \leq d(p, r) + 2B. \quad (15)$$

En combinant les inégalités (14) et (15), on a finalement :

$$\begin{aligned}
d(p, r) - |\gamma| + |\gamma|_w + 2B &\geq d(p, r) + 2B - |\alpha_0| + |\alpha_0|_w - |\beta_0| + |\alpha_0|_w + |\beta_0|_w \\
&\geq d(p, q) + d(q, r) - |\alpha_0| + |\alpha_0|_w - |\beta_0| + |\alpha_0|_w + |\beta_0|_w
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$c_w(p, r) + 2B \geq c_w(p, q) + c_w(q, r).$$

□

Preuve de la proposition 5. On peut maintenant montrer que h_w est un quasi-morphisme : on va trouver une constante D dépendant uniquement de la constante d'hyperbolicité δ et telle que pour tous a et b dans G , on ait :

$$|h_w(a) + h_w(b) - h_w(ab)| \leq D. \quad (16)$$

Pour tout $a \in G$, on a :

$$\begin{aligned} h_w(a) &= c_w(a) - c_{w^{-1}}(a) \text{ (par définition)} \\ &= -h_{w^{-1}}(a) \\ &= -h_w(a^{-1}) \end{aligned}$$

Donc l'inégalité (16) est équivalente à :

$$|h_w(a) + h_w(b) + h_w(b^{-1}a^{-1})| \leq D.$$

Par ailleurs, pour tout $g \in G$, comme g agit sur X par isométries, on a :

$$h_w(g(p), g(q)) = h_w(p, q).$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} h_w(a) + h_w(b) + h_w(b^{-1}a^{-1}) &= h_w(p, a(p)) + h_w(p, b(p)) + h_w(p, b^{-1}a^{-1}(p)) \\ &= h_w(p, a(p)) + h_w(a(p), ab(p)) + h_w(ab(p), p). \end{aligned}$$

Pour montrer l'inégalité (16), on va plus généralement montrer que si p_0, p_1 et p_2 sont trois points de X , on peut borner la quantité $|h_w(p_0, p_1) + h_w(p_1, p_2) + h_w(p_2, p_0)|$.

Soient α_i et α'_i des chemins réalisants entre p_i et p_{i+1} pour c_w et $c_{w^{-1}}$ respectivement (les indices sont pris modulo 3). Si γ est un chemin joignant p à q , on notera $c_w(\gamma)$ la quantité $d(p, q) - |\gamma| + |\gamma|_w$ (si γ est un chemin réalisant, on a donc $c_w(\gamma) = c_w(p, q)$).

Idée : On veut sommer les $c_w(\alpha_i)$ et soustraire les $c_{w^{-1}}(\alpha'_i)$.

- Sur la figure 9, ceci revient à sommer c_w sur le triangle rouge parcouru dans le sens indirect, puis à soustraire $c_{w^{-1}}$ sur le triangle bleu parcouru dans le sens direct. Le point 1 du lemme 3 nous permet de remplacer la somme des $c_{w^{-1}}$ sur le triangle bleu parcouru dans le sens direct par la somme des c_w sur le triangle bleu parcouru dans le sens indirect : ainsi on est ramené à sommer c_w sur le triangle rouge, puis à soustraire c_w sur le triangle bleu, les deux triangles étant parcouru dans le sens indirect.
- On trouve d'abord (4.2) six points $q_0, q_1, q_2, q'_0, q'_1$ et q'_2 comme sur la figure et qui sont à distance bornée les uns des autres. Le point 3 du lemme 3 nous permet de couper α_i , respectivement α'_i , en deux parties : avant et après q_i , respectivement q'_i (inégalités 17 et 18). On est ramené (à une constante près) à sommer sur les six morceaux de triangle rouge et à soustraire sur les six morceaux de triangle bleu.

- On regroupe alors les morceaux de chemins deux par deux la façon suivante (réorganisation de la somme 20) : un morceaux rouge qui arrive sur un sommet p_i est associé au morceau bleu partant du même sommet, et un morceau bleu qui arrive sur un sommet p_i est associé au morceau rouge partant du même sommet.
- Le point 2 du lemme 3 nous permet de majorer la valeur de c_w sur ces couples de morceaux de triangles par la distance entre deux points q_i et q'_j , qui est bornée (on montre que $c_w(q_i, p_{i+1}) - c_w^{-1}(p_{i+1}, q'_{i+1})$ est borné, inégalité 19).
- On peut ainsi borner la quantité $|h_w(p_0, p_1) + h_w(p_1, p_2) + h_w(p_2, p_0)|$.

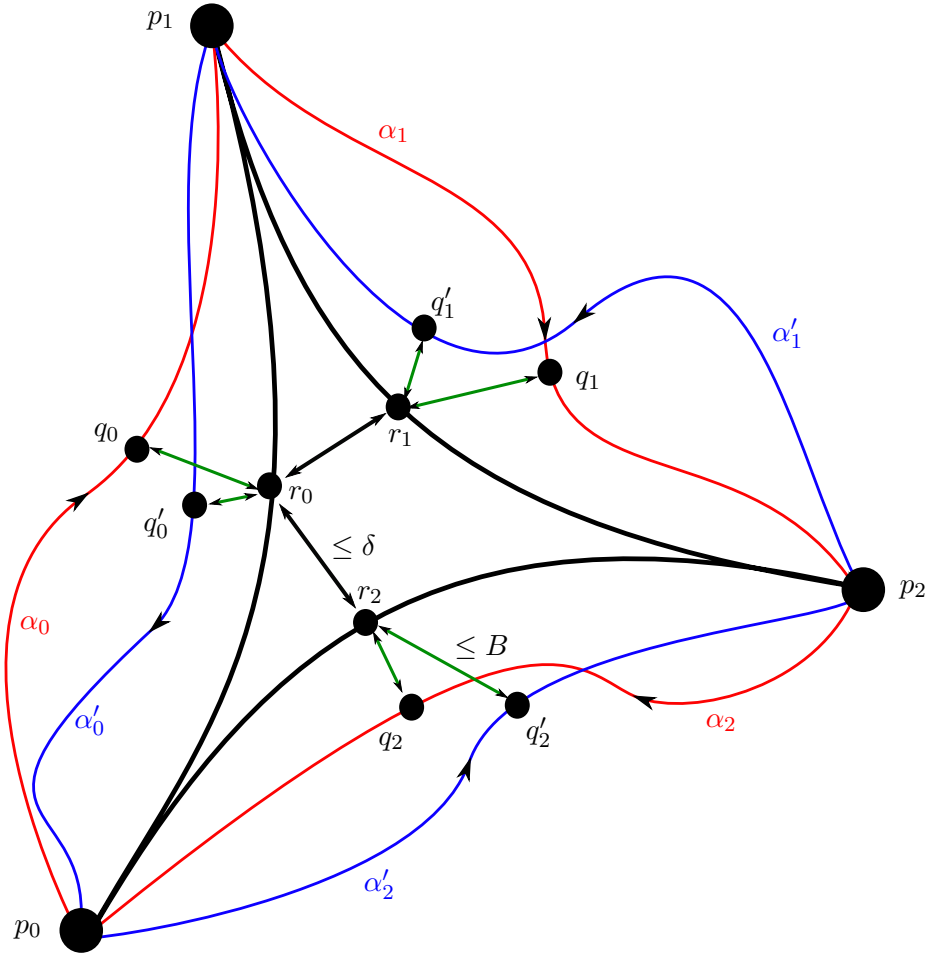


FIGURE 9 – Découpage des chemins réalisants

Fait. *Il existe une constante positive N et des points q_i sur α_i et q'_i sur α'_i pour tous $i = 0, 1, 2$ tels que ces six points soient dans un N -voisinage les uns des autres (voir figure 9).*

En effet : on considère un triangle géodésique $p_0p_1p_2$, ayant pour côtés trois segments géodésiques $[p_0p_1]$, $[p_1p_2]$ et $[p_2p_0]$. Comme $[p_0p_1]$ est contenu dans la réunion

des δ -voisinages de $[p_1p_2]$ et $[p_2p_0]$, il existe $r_0 \in [p_0p_1]$ dans l'intersection de ces deux voisinages. Soient alors r_1 et r_2 sur $[p_1p_2]$ et $[p_2p_0]$ respectivement, tels que $d(r_0, r_1) \leq \delta$ et $d(r_0, r_2) \leq \delta$.

Comme α_i et α'_i sont des chemins réalisants, d'après le lemme 2, ce sont des $(2, 4)$ -géodésiques. Grâce au lemme de Morse (1), on en déduit que α_i et α'_i sont dans un B -voisinage de $[p_i, p_{i+1}]$, où B est la constante dépendant de δ , $\kappa = 2$ et $\epsilon = 4$ donnée par le lemme de Morse. Soient donc q_i sur α_i et q'_i sur α'_i tels que $d(q_i, r_i) \leq B$ et $d(q'_i, r_i) \leq B$.

Ainsi, en prenant $N = 2B + 2\delta$, on voit que la distance entre deux points quelconques parmi les q_i et q'_i est inférieure à N . \square

Fin de la preuve. Par ailleurs, le lemme 3 (point 3) nous donne (pour q_i sur α_i) :

$$c_w(p_i, p_{i+1}) + 2B \geq c_w(p_i, q_i) + c_w(q_i, p_{i+1}) \geq c_w(p_i, p_{i+1}) - 1. \quad (17)$$

Et (pour q'_i sur α'_i) :

$$c_{w^{-1}}(p_i, p_{i+1}) + 2B \geq c_{w^{-1}}(p_i, q'_i) + c_{w^{-1}}(q'_i, p_{i+1}) \geq c_{w^{-1}}(p_i, p_{i+1}) - 1 \quad (18)$$

Mais aussi (points 1 et 2 du lemme 3) :

$$|c_w(q_i, p_{i+1}) - c_{w^{-1}}(p_{i+1}, q'_{i+1})| \leq N. \quad (19)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^2 h_w(p_i, p_{i+1}) - 3(1 + 2B) \right| &= \left| \sum_{i=0}^n (c_w(\alpha_i) - c_{w^{-1}}(\alpha'_i) - 1 - 2B) \right| \\ &\quad (\text{par définition de } h_w) \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^2 c_w(p_i, q_i) + c_w(q_i, p_{i+1}) - c_{w^{-1}}(p_i, q'_i) - c_{w^{-1}}(q'_i, p_{i+1}) \right| \\ &\quad (\text{en soustrayant (18) à (17)}) \\ &\leq 6N \\ &\quad (\text{en réorganisant la somme et en utilisant (19)}). \end{aligned}$$

Finalement on a montré pour tous $p_0, p_1, p_2 \in X$:

$$|h_w(p_0, p_1) + h_w(p_1, p_2) + h_w(p_2, p_0)| \leq 6N + 3(2B + 1) = 18B + 12\delta + 3.$$

Donc $D = 18B + 12\delta + 3$ convient : h_w est un quasi-morphisme (et son défaut est borné par $18B + 12\delta + 3$). \square

On sait à présent construire des quasi-morphismes sur les groupes agissant sur un graphe hyperbolique, donc en particulier sur le groupe de tresses (agissant sur le graphe des courbes du disque épointé, comme nous le verrons plus tard). Cette construction n'est en fait pas très intéressante si elle nous fournit uniquement des quasi-morphismes triviaux : dans la suite, nous allons donc chercher à montrer que dans le cas du groupe de tresses, il existe des quasi-morphismes de comptage non triviaux.

Troisième partie

Critère de non-trivialité

Dans cette partie, nous cherchons à établir le critère suivant (en utilisant [6] et [2]) :

Critère. *Soit G le groupe modulaire d'une surface non sporadique. S'il existe un élément pseudo-Anosov $\sigma \in G$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, σ^k et σ^{-k} ne sont pas conjugués dans G , alors on peut construire un quasi-morphisme non trivial sur G .*

Pour y parvenir, nous allons montrer deux lemmes :

- Tout d'abord, nous verrons (lemme 4) que si l'on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, σ^k et σ^{-k} ne sont pas conjugués, alors G contient un élément pseudo-Anosov qui possède un axe géodésique « non retournable » (au sens de la définition 21).
- Nous montrerons ensuite (lemme 5) que si G contient un élément pseudo-Anosov qui possède un axe géodésique « non retournable », alors cet axe permet de construire un quasi-morphisme non trivial sur G .

5 Non-retournement

Le but de cette section est de définir la notion d'axe géodésique non retournable.

On commence par la remarque suivante, qui va nous être utile dans la suite : on va montrer que si deux géodésiques restent à distance bornée, alors elles « avancent à la même vitesse », dans le sens suivant :

Remarque. *Soit X un graphe, muni de sa métrique naturelle. Soient $\gamma_1 = [p_1, q_1]$ et $\gamma_2 = [p_2, q_2]$ deux segments géodésiques de X qui ont la même longueur. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que γ_2 est dans un C -voisinage de γ_1 . Alors :*

$$d(q_1, q_2) \leq d(p_1, p_2) + 2C.$$

Démonstration. Soit r un point de γ_1 vérifiant $d(r, q_2) \leq C$ (existe par hypothèse car γ_2 est dans un C -voisinage de γ_1). On note α le segment de γ_1 entre p_1 et r et β celui entre r et q_1 . Soit μ un segment géodésique entre q_1 et q_2 (voir figure à droite).

Comme $|\gamma_1| = |\gamma_2|$, on a $|\alpha| + |\beta| = |\gamma_2|$.

Par ailleurs, γ_2 est géodésique donc :

$$|\gamma_2| \leq d(p_1, p_2) + |\alpha| + C.$$

On en déduit : $|\beta| \leq d(p_1, p_2) + C$.

D'autre part, comme μ est géodésique : $|\mu| \leq |\beta| + C$.

Finalement, on a montré que : $|\mu| \leq d(p_1, p_2) + 2C$.

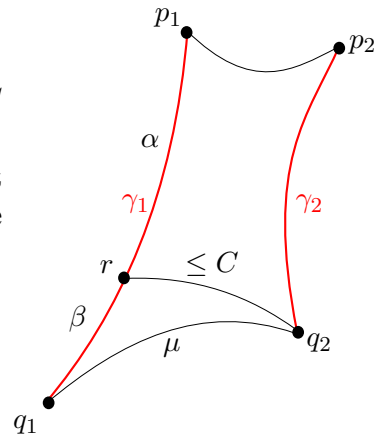


FIGURE 10 – Segments géodésiques □

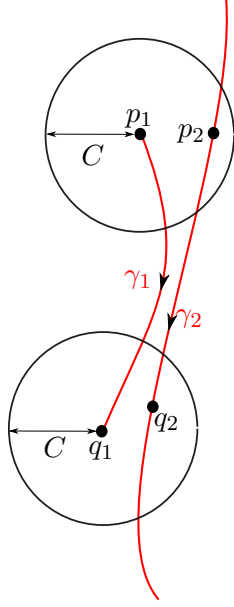


FIGURE 11 – Comparaison des orientations.
lemme de Morse).

Ainsi, si un segment géodésique γ_1 reste à distance bornée C d'un autre segment géodésique ou d'un axe géodésique γ_2 , et si l'on a choisi une orientation sur γ_1 et γ_2 , alors si le segment γ_1 est « suffisamment long » (par rapport à C), cela à un sens de comparer les orientations de γ_1 et γ_2 . On note p_1 et q_1 les extrémités de γ_1 . On peut alors choisir sur γ_2 un point p_2 dans un C -voisinage de p_1 et un point q_2 dans un C -voisinage de q_1 . Si $d(p_1, q_1) \geq 4$ (on dira que le segment γ_1 est suffisamment long), l'orientation du segment $[p_2q_2]$ induite par γ_2 , ne dépend pas du choix de p_2 et q_2 (voir figure à gauche), et on peut donc comparer les orientations de γ_1 et γ_2 . Quitte à augmenter la longueur de γ_1 si nécessaire, on a le même phénomène en considérant des segments quasi-géodésiques (puisqu'ils restent proches de vraies géodésiques, d'après le

On rappelle que d'après le théorème de Bowditch (2), si S est une surface non sporadique, alors il existe $b \in \mathbb{N}$ un entier dépendant uniquement de S tel que pour tout élément pseudo-Anosov $\sigma \in G$, il existe une géodésique bi-infinie sur laquelle σ^b agit par translation. On appelle **axe géodésique** de σ^b une telle géodésique. Si l est un axe géodésique de σ , alors on oriente l dans le sens de translation de σ sur l . On note alors l^{-1} la même géodésique munie de l'orientation inverse : c'est un axe géodésique orienté de σ^{-1} .

Notations. Soit S une surface non sporadique, G son groupe modulaire et X son graphe des courbes. On note toujours B la constante de Morse associée à $(\kappa, \epsilon) = (2, 4)$ (dépendant donc uniquement de δ , la constante d'hyperbolicité de X).

Définition 20 (Retournement des segments). Soit $\sigma \in G$ un élément pseudo-Anosov qui possède un axe géodésique l .

- Un segment w (suffisamment long) sur l est dit **retournable** s'il existe $g \in G$ tel que $g(w)$ est dans le B -voisinage de l^{-1} , et $g : w \rightarrow g(w)$ préserve les orientations induites par σ sur w et σ^{-1} sur $g(w)$ (voir figure 12).
- Dans le cas contraire, c'est-à-dire si pour tout $g \in G$, $g(w)$ sort du B -voisinage de l ou bien reste orienté dans le même sens que l , le segment w est dit **non retournable** (on a alors que tout segment de l contenant w est non retournable).

Définition 21 (Retournement des axes géodésiques). Soit $\sigma \in G$ un élément pseudo-Anosov qui possède un axe géodésique.

- Un axe géodésique l de σ est dit **non retournable** s'il contient un segment w (suffisamment long) non retournable.

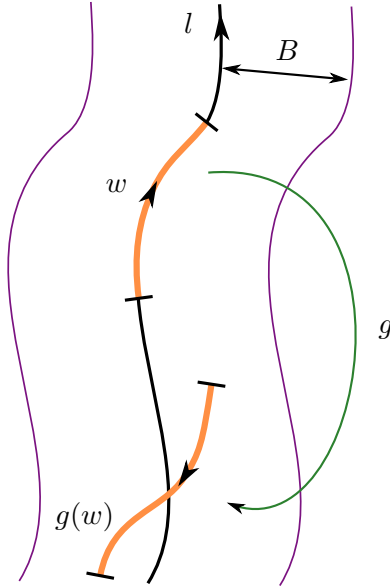


FIGURE 12 – Retournement d'un segment

- Si tous les segments de l (suffisamment longs) sont retournables, on dira que l est un axe géodésique retournable.

Définition 22. Soit $\sigma \in G$ un élément pseudo-Anosov. On dira que σ est à axes retournables si σ possède un axe géodésique et si tous les axes géodésiques de σ sont retournables.

6 Un critère de non-retournement

Dans cette section, on se place dans le cas où G est le groupe modulaire d'une surface non sporadique agissant sur son graphe des courbes. Nous allons donner un critère qui permet de déterminer si un élément pseudo-Anosov a ou non une puissance qui possède un axe non retournable. Dans la section suivante, nous verrons que l'existence d'éléments pseudo-Anosov ayant un axe non retournable est une condition suffisante pour construire un quasi-morphisme non trivial sur G .

Nous allons montrer que si σ est un élément pseudo-Anosov de G tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, σ^k n'est pas conjugué à son inverse, alors il existe une puissance de σ qui possède un axe non retournable.

Notons que la réciproque est vraie : s'il existe $g \in G$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sigma^k = g\sigma^{-k}g^{-1}$, alors l'élément g retourne les éventuels axes géodésiques des puissances de σ .

Nous utiliserons de manière cruciale le fait que l'action du groupe modulaire sur le graphe des courbes est « proprement faiblement discontinue ». Nous allons d'abord définir cette notion, puis énoncer de manière plus précise et prouver le critère de non-retournement.

6.1 Action faiblement proprement discontinue

Définition 23. On dit que l'action de G sur X est *faiblement proprement discontinue* si pour tout élément pseudo-Anosov $\sigma \in G$, pour tout $x \in X$ et pour tout $C > 0$, il existe $N > 0$ tel que l'ensemble suivant soit fini :

$$\{g \in G \mid d(x, g(x)) \leq C \text{ et } d(\sigma^N x, g(\sigma^N x)) \leq C\}.$$

On admet la proposition suivante, due à M. Bestvina et K. Fujiwara (voir [2], Proposition 11).

Proposition 6. Soit S une surface non sporadique. L'action de $MCG(S)$ sur $\mathcal{G}(S)$ est faiblement proprement discontinue.

6.2 Preuve du critère de non-retournement

Lemme 4. Soit S une surface non sporadique, soit G son groupe modulaire, agissant sur son graphe des courbes X . Soit b l'entier du théorème de Bowditch (2).

Si σ est un élément pseudo-Anosov de G tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, σ^k n'est pas conjugué à son inverse, alors σ^b possède un axe géodésique non retournable.

Preuve. On va montrer, par l'absurde, que si un élément pseudo-Anosov $\tilde{\sigma}$ est tel que tous les axes géodésiques de $\tilde{\sigma}^b$ sont retournables, alors on peut trouver k tel que $(\tilde{\sigma}^b)^k$ et $(\tilde{\sigma}^b)^{-k}$ sont conjugués, contredisant ainsi l'hypothèse sur les puissances de $\tilde{\sigma}$. Pour simplifier les notations, **on notera σ l'élément $\tilde{\sigma}^b$** .

Idée : On veut donc montrer que lorsque σ est à axes retournables, une puissance de σ est conjuguée à son inverse. On va déjà voir que l'on peut retourner les segments des axes de sorte que le segment retourné reste proche du segment d'origine. On aura alors que lorsque l'on se déplace d'une certaine distance sur un segment d'un axe, puis de la même distance en « suivant le mouvement » du segment retourné, on revient proche du point d'origine. Le fait que l'action du groupe modulaire est faiblement proprement discontinue nous permettra alors de conclure.

Concrètement, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on va trouver $x \in X$, une constante $C > 0$ et des $h_i \in G$ tels que $f_{i,n} := h_i \sigma^n h_i^{-1} \sigma^n$ vérifie :

$$\begin{aligned} d(x, f_{i,n} x) &\leq C \\ \text{Et : } d(\sigma^N x, f_{i,n} \sigma^N x) &\leq C. \end{aligned}$$

Comme l'action du groupe modulaire est faiblement proprement discontinue, on en déduira alors que les $f_{i,n}$ sont en nombre fini, et on aura, pour un certain i fixé, deux entiers n et m distincts tels que :

$$h_i \sigma^m h_i^{-1} \sigma^m = h_i \sigma^n h_i^{-1} \sigma^n,$$

et donc finalement :

$$\sigma^{m-n} = h_i \sigma^{m-n} h_i^{-1}.$$

Choix de x et des h_i . Supposons donc que σ est à axes retournables. Soit l un axe géodésique de σ . Pour tout w suffisamment long sur l , il existe $g \in G$ tel que $g(w)$ est dans un B -voisinage de l^{-1} .

Par ailleurs, on sait (d'après le théorème de Bowditch) que σ agit sur l par translation. On note $A = d(p, \sigma p)$ la distance de translation, qui ne dépend pas du choix de $p \in l$. Soit maintenant $x \in l$. On choisit un segment w d'extrémités $p = \sigma^{-k_1}x$ et $q = \sigma^{k_2}x$, où k_1 et k_2 sont deux entiers strictement positifs assez grands. Le segment $g(w)$ étant dans un B -voisinage de l^{-1} , il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $d(g(p), \sigma^m x) \leq B + A$.

Soit alors $h := \sigma^{k_2 - m}g$. Le segment $h(w)$ reste dans un B -voisinage de l^{-1} , orienté dans le même sens, et tel que $d(h(p), q) \leq B + A$ (on a seulement traduit $g(w)$ pour le mettre à la même hauteur que w). Par ailleurs, comme $MCG(S)$ agit par isométries sur $\mathcal{G}(S)$, h est une isométrie, donc $h(w)$ est un segment géodésique, de même longueur que w .

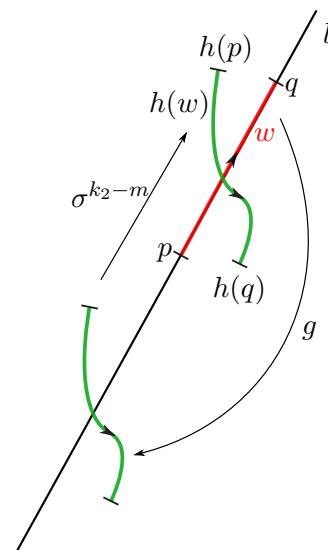


FIGURE 13 – Choix de h .

On choisit maintenant $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de segments inclus dans l et contenant x . On note p_i et q_i leurs extrémités, et on suppose qu'il existe k_i et k'_i deux entiers strictement positifs tels que $p_i = \sigma^{-k'_i}x$ et $q_i = \sigma^{k_i}x$. Soient h_i des éléments de G que l'on choisit pour tout w_i de la même façon que l'on avait choisit h pour w .

Choix de la constante C . On fixe n et N deux entiers. Pour tout i suffisamment grand, w_i contient $\sigma^n x$ et $\sigma^N x$. On cherche à borner la distance entre x et $h_i \sigma^n h_i^{-1} \sigma^n(x)$. On va pour cela utiliser un point bien choisi entre x et $h_i \sigma^n h_i^{-1} \sigma^n(x)$, et montrer qu'on peut borner la distance entre x et ce point, et celle entre ce point et $h_i \sigma^n h_i^{-1} \sigma^n(x)$ (voir figure 14, ce point « bien choisi » est le point noté $h_i \sigma^n h_i^{-1}(y)$).

Soit y le point de $h_i(w_i)$ tel que $d(q_i, \sigma^n x) = d(h_i(p_i), y)$. Alors d'après la remarque (5), appliquée aux segments $[q_i, \sigma^n(x)]$ et $[h_i(p_i), y]$, on a $d(y, \sigma^n x) \leq 3B + A$.

Comme σ^n agit par translation sur l , on a :

$$d(x, \sigma^n x) = d(h_i^{-1}(y), \sigma^n(h_i^{-1}(y))).$$

Par ailleurs, $h_i \sigma^n$ est une isométrie, donc on en déduit :

$$d(x, \sigma^n x) = d(y, h_i \sigma^n h_i^{-1}(y)).$$

Comme $d(y, \sigma^n x) \leq 3B + A$, en appliquant la remarque (5) aux segments $[\sigma^n(x), x]$ et $[y, h_i \sigma^n h_i^{-1}(y)]$, on a alors :

$$d(x, h_i \sigma^n h_i^{-1}(y)) \leq 5B + A.$$

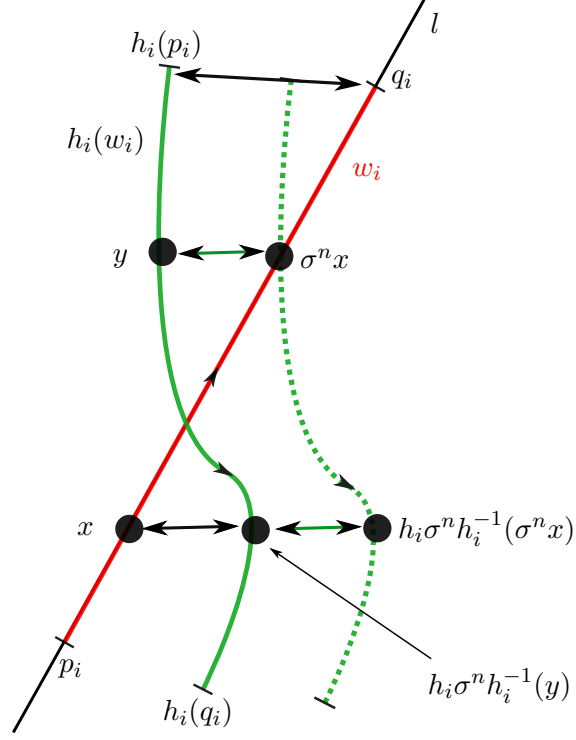


FIGURE 14 – Comportement des segments géodésiques

Par ailleurs, comme $h_i \sigma^n h_i^{-1}$ est une isométrie :

$$\begin{aligned} d(h_i \sigma^n h_i^{-1}(y), h_i \sigma^n h_i^{-1}(\sigma^n(x))) &= d(y, \sigma^n x) \\ &\leq 3B + A \end{aligned}$$

On note $f_{i,n} = h_i \sigma^n h_i^{-1} \sigma^n$. On a donc :

$$\begin{aligned} d(x, f_{i,n}x) &\leq d(x, h_i \sigma^n h_i^{-1}(y)) + d(h_i \sigma^n h_i^{-1}(y), f_{i,n}x) \\ &\leq 5B + A + 3B + A \\ &\leq 8B + 2A \end{aligned}$$

On montre de la même façon (comme on a $\sigma^N x \in w_i$) que :

$$d(\sigma^N x, f_{i,n} \sigma^N x) \leq 8B + 2A.$$

Ainsi, $C = 8B + 2A$ convient.

Choix de N et conclusion. Comme G est un groupe modulaire, son action sur le graphe des courbes est faiblement proprement discontinu d'après la proposition (6), qui implique alors qu'on peut choisir N tel que les $f_{i,n}$ soient en nombre fini : on note M ce nombre ($M = \text{Card}\{f_{i,n}, \text{ avec } i, n \in \mathbb{N} \text{ tels que } w_i \text{ contient } \sigma^N x \text{ et } \sigma^n x\}$). On fixe i_0

assez grand, tel que w_{i_0} contienne $\sigma^{M+1+N}x$. On a alors deux entiers m et n (compris entre 0 et $M+1$) tels que $f_{i_0,m} = f_{i_0,n}$, c'est-à-dire :

$$h_{i_0}\sigma^m h_{i_0}^{-1}\sigma^m = h_{i_0}\sigma^n h_{i_0}^{-1}\sigma^n.$$

Et on a donc :

$$\sigma^{m-n} = h_{i_0}\sigma^{m-n}h_{i_0}^{-1}.$$

Ce qui contredit le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, σ^k n'est pas conjugué à son inverse. \square

On sait donc à présent que si notre groupe modulaire contient un élément pseudo-Anosov qui n'a aucune puissance conjuguée à son inverse, alors il contient un pseudo-Anosov qui possède un axe non retournable. Nous allons voir dans la prochaine section que si le groupe modulaire contient un pseudo-Anosov ayant un axe non retournable, alors on sait construire un quasi-morphisme non trivial. On pourra ainsi en déduire le critère de non-trivialité voulu.

7 Construction du quasi-morphisme non trivial

Lemme 5. *Soit G le groupe modulaire d'une surface non sporadique. S'il existe un élément pseudo-Anosov $\sigma \in G$ qui possède un axe non retournable, alors on peut construire un quasi-morphisme non trivial sur G .*

Preuve.

(1) Soit donc $\sigma \in G$ un élément pseudo-Anosov qui possède un axe non retournable, et soit l un axe géodésique de σ non retournable : il existe un segment w inclus dans l tel que pour tout $g \in G$, $g(w)$ est soit loin de l^{-1} (sort du B -voisinage), soit orienté à l'envers (c'est-à-dire dans le sens de l).

En particulier, on ne retrouve aucune copie de w orientée dans le même sens que l^{-1} dans le B -voisinage de l^{-1} , c'est à dire aucune copie de w^{-1} dans le B -voisinage de l (voir figure 15).

Idée : Comme il n'y a aucune copie de w^{-1} proche de l , on va pouvoir évaluer les fonctions de comptage c_w et $c_{w^{-1}}$ sur certaines puissances de σ pour lesquelles c_w prend des valeurs strictement positives et $c_{w^{-1}}$ vaut 0. Ainsi on aura que $h_w = c_w - c_{w^{-1}}$ est non trivial.

(2) Montrons tout d'abord qu'il existe $\tilde{\sigma}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_w(\tilde{\sigma}^n) \geq n$: Soient p et q les extrémités du segment w . Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $w \subset \gamma_k$, où γ_k est le segment de l joignant p à $\sigma^k(p)$. On note alors $\tilde{\sigma} = \sigma^k$.

On a la fonction de comptage $c_w(\tilde{\sigma}) = d(p, \tilde{\sigma}(p)) - \inf_{\gamma} (|\gamma| - |\gamma|_w)$, où l'inf est pris sur les γ reliant p à $\tilde{\sigma}(p)$.

Le segment γ_k est géodésique, donc $d(p, \tilde{\sigma}(p)) = |\gamma_k|$, et par ailleurs $|\gamma_k|_w \geq 1$ (on a choisi $\tilde{\sigma}$ dans ce but), d'où $c_w(\tilde{\sigma}) \geq 1$.

D'autre part, pour tous entiers positifs $i \neq j$, $\tilde{\sigma}^i(w) \subset l$, et $\tilde{\sigma}^i(w)$ et $\tilde{\sigma}^j(w)$ sont deux

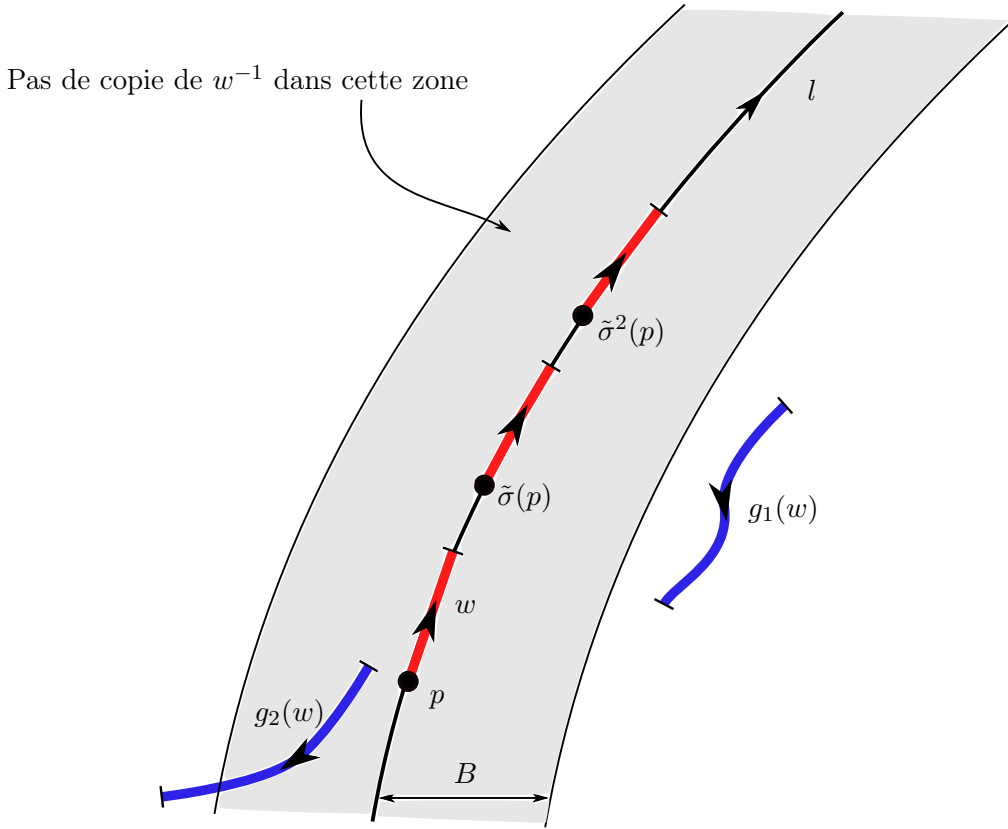


FIGURE 15 – Zone de non-retournement

copies disjointes de w . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le chemin inclus dans l et reliant p à $\tilde{\sigma}^n(p)$ contient donc au moins n copies disjointes de w , et ainsi $c_w(\tilde{\sigma}^n) \geq n$.

(3) Montrons à présent que $c_{w^{-1}}(\tilde{\sigma}^n) = 0$:

Par hypothèse, aucune copie de w^{-1} n'est contenue dans un B -voisinage de l . D'après le lemme de Morse (1), on sait donc qu'aucune $(2, 4)$ -quasi-géodésique joignant p à q (p et q quelconque sur l) ne contient de copie de w^{-1} . Par ailleurs, on a vu (lemme 2) que tout chemin réalisant est une $(2, 4)$ -quasi-géodésique. Ainsi, aucun chemin réalisant ne contient de copie de w^{-1} , c'est-à-dire $|\gamma|_{w^{-1}} = 0$ pour tout chemin réalisant γ , et donc :

$$c_{w^{-1}}(\tilde{\sigma}) = d(p, \tilde{\sigma}(p)) - \inf_{\gamma} (|\gamma| - |\gamma|_{w^{-1}}) = 0.$$

Comme $\tilde{\sigma}^n(p)$ est sur l pour tout n , on a aussi $c_{w^{-1}}(\tilde{\sigma}^n) = 0$ pour tout n .

(4) Finalement, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$h_w(\tilde{\sigma}^n) = c_w(\tilde{\sigma}^n) - c_{w^{-1}}(\tilde{\sigma}) \geq n.$$

L'homogénéisé ϕ de h_w est donc non nul :

$$\phi(\tilde{\sigma}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_w(\tilde{\sigma}^n)}{n} \geq 1.$$

Montrons que ϕ n'est pas un morphisme, on pourra en déduire (d'après la remarque 3.1) que h_w est non trivial.

Si τ est un élément réductible de G , alors il existe $p \in X$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $p^k = p$. Ainsi pour h_w défini à partir de ce p , on a $h_w(p^k) = 0$, et donc $\phi(p) = 0$. Or le groupe modulaire est engendré par des twists, qui sont des éléments réductibles (on l'admet dans le cas général (cf [9]); dans le cas du groupe de tresses, on verra dans la partie suivante qu'il est engendré par des demi-twists, qui sont des éléments réductibles). Ainsi, si ϕ était un morphisme, on aurait $\phi = 0$. Comme ce n'est pas le cas, ϕ n'est pas un morphisme.

On a donc montré que h_w est un quasi-morphisme **non trivial** sur G . □

Conclusion.

En corollaire des lemmes (4) et (5), on obtient notre critère de non-trivialité :

Critère. *Soit G le groupe modulaire d'une surface non sporadique. S'il existe un élément pseudo-Anosov $\sigma \in G$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, σ^k et σ^{-k} ne sont pas conjugués dans G , alors on peut construire un quasi-morphisme non trivial sur G .*

Il nous reste à trouver un pseudo-Anosov du groupe de tresses vérifiant ce critère : c'est ce que nous allons faire dans la partie suivante.

Remarque. Si l'on choisit p sur un axe géodésique non retournable de σ^b (où b est l'entier du théorème de Bowditch) et w comme étant le chemin joignant p à $\sigma^{kb}p$ sur cet axe, où k est un entier strictement positif tel que w soit « suffisamment long » et non retournable, on a alors $h_w(\sigma^{kbn}) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc l'homogénéisé ϕ de h_w vérifie :

- $\phi(\sigma^n) = \frac{n}{kb}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $\phi(\tau) = 0$ pour tout τ réductible ou périodique.

Quatrième partie

Cas du groupe de tresses

8 Le groupe de tresses vu comme groupe modulaire

Définition 24. Le groupe de tresses B_n est le groupe engendré par $(n - 1)$ générateurs $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ et par les relations dites de tresses :

- $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ pour tous i et j tels que $|i - j| \geq 2$,
- $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ pour tout $i \leq n - 2$.

Soit D le disque, et soient $\{p_1, \dots, p_n\}$ n points distincts sur D . On note D_n le disque D privé de $\{p_1, \dots, p_n\}$. Le groupe $MCG(D_n)$ correspond aux classes d'homéomorphismes directs de D laissant $\{p_1, \dots, p_n\}$ stable. On a alors la proposition suivante, montrée dans le chapitre 1 de [12] :

Proposition 7. Le groupe de tresses B_n est isomorphe au groupe $MCG(D_n)$.

Demi-twists. On va voir comment retrouver les générateurs du groupe de tresses dans $MCG(D_n)$.

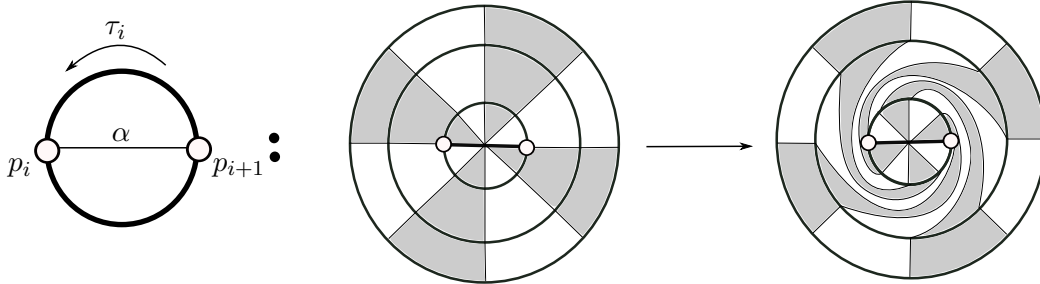


FIGURE 16 – Demi-twist

Soit (S, Q) une surface épointée, où S est la surface et Q un ensemble de points marqués sur cette surface, correspondants aux pointes. Soit α un chemin continu (plongement du segment $[0, 1]$ dans S) joignant deux points de Q et tel que l'intérieur de α ne contienne aucun point de Q . On peut alors définir le demi-twist $\tau_\alpha : (S, Q) \rightarrow (S, Q)$ comme étant la classe de l'homéomorphisme f suivant :

On identifie un voisinage U de α avec le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ tel que $\alpha = [-1/2, 1/2]$, et on pose (voir figure 16) :

- $f = id$ en dehors de U ,
- $f(z) = -z$ si $|z| \leq 1/2$,
- $f(z) = e^{(-2i\pi|z|)z}$ si $1/2 \leq |z| \leq 1$.

Sur le disque D_n , on considère les $(n - 1)$ demi-twists $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$, où τ_i correspond au demi-twist construit à partir du segment $\alpha = [p_i, p_{i+1}]$ (voir figure 17). Ces

demi-twists vérifient les relations de tresses, ce qui nous donne un morphisme de B_n dans $MCG(D - \{p_1, \dots, p_n\})$ envoyant chaque σ_i sur τ_i . Ce morphisme est en fait un isomorphisme (voir [12], chapitre 1, paragraphe 1.6.3.) : les τ_i engendrent le groupe de tresses et vérifient les relations de tresses.

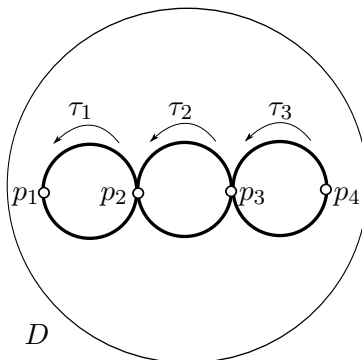


FIGURE 17 – Demi-twists générateurs de B_4

Ainsi, pour $n \geq 4$ (on veut que la surface soit non sporadique), pour construire un quasi-morphisme sur le groupe de tresses B_n , il nous reste à trouver un élément pseudo-Anosov vérifiant le critère III de non-trivialité.

9 Un pseudo-Anosov du groupe de tresses qui vérifie le critère de non-trivialité

Le groupe de tresses étant sans torsion, il n'a pas d'éléments périodiques. On voit facilement que chaque τ_i est réductible puisqu'il laisse fixe une classe de courbes fermées simples essentielles (par exemple toute classe de courbes ayant un représentant qui ne coupe pas le segment $[p_i, p_{i+1}]$). Pour obtenir des quasi-morphismes, nous avons besoin d'éléments pseudo-Anosov, qui sont plus difficiles à identifier.

Nous allons ici exhiber un élément pseudo-Anosov du groupe de tresses, que l'on notera $\beta_{m,n}$. Nous montrerons que cet élément vérifie le critère de non-trivialité, permettant ainsi de construire un quasi-morphisme non trivial sur le groupe de tresses.

9.1 Description de $\beta_{m,n}$

Dans l'article [11], E. Hironaka et E. Kin utilisent un algorithme mis au point par M. Bestvina et M. Handel (voir [3]) pour montrer que certains éléments sont pseudo-Anosov. En particulier, ils montrent que dans B_{n+m+1} , l'élément :

$$\beta_{m,n} := \tau_1 \dots \tau_m \tau_{m+1}^{-1} \dots \tau_{m+n}^{-1}$$

(où l'on compose les éléments de gauche à droite) est pseudo-Anosov.

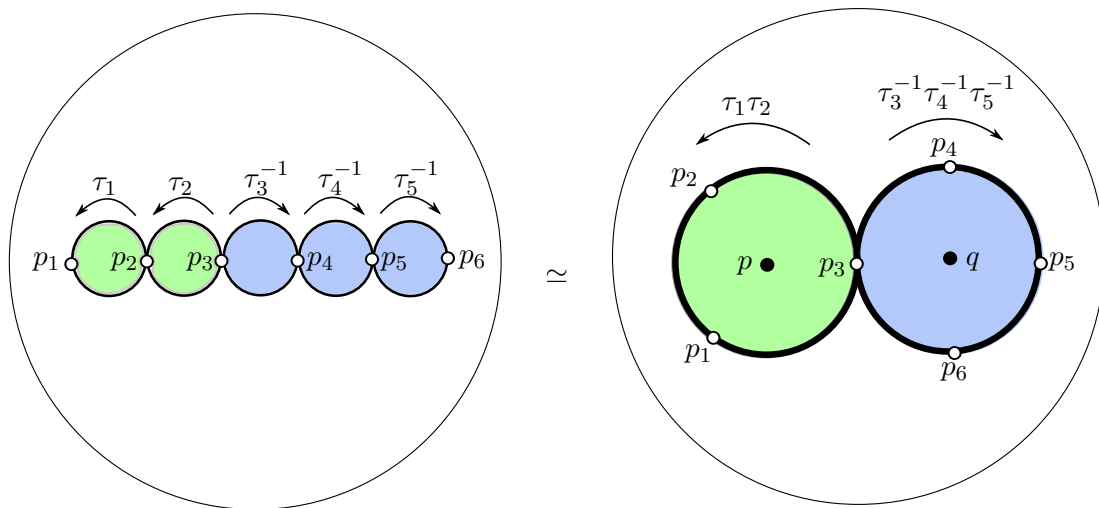


FIGURE 18 – Action de $\beta_{2,3}$ sur D_6

Pour comprendre l'action de $\beta_{m,n}$, plutôt que de regarder les actions successives des demi-twists τ_1 , puis τ_2 , ..., puis τ_m , puis τ_{m+1}^{-1} , ..., puis τ_{m+n}^{-1} , on peut les regrouper par blocs (voir figure 18) :

- On fait d'abord agir le bloc $\tau_1 \dots \tau_m$ (bloc vert) : si l'on considère que les points p_1, \dots, p_{m+1} sont répartis régulièrement et dans le sens indirect sur un cercle de centre p , alors l'action de $\tau_1 \dots \tau_m$ correspond à une rotation de centre p et d'angle $\frac{2\pi}{m+1}$ (on peut voir ça en regardant la version géométrique de la tresse $\tau_1 \dots \tau_m$, figure 19).
- On fait ensuite agir le deuxième bloc $\tau_{m+1}^{-1} \dots \tau_{m+n}^{-1}$ (bloc bleu), qui lui correspond à une rotation de centre q et d'angle $\frac{-2\pi}{n+1}$ s'il on considère que les points p_{m+1}, \dots, p_{m+n} sont répartis régulièrement et dans le sens indirect sur un cercle de centre q .

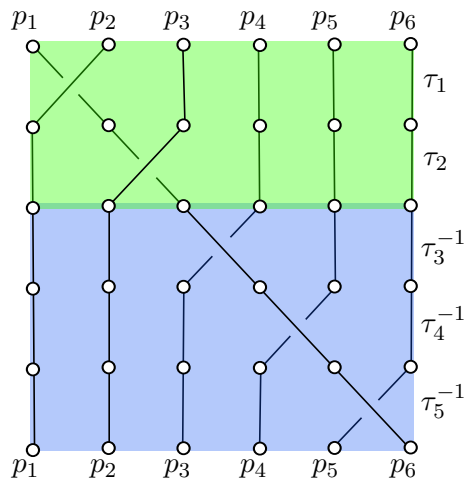


FIGURE 19 – Version géométrique de la tresse $\beta_{2,3}$

9.2 L'élément $\beta_{m,n}$ est pseudo-Anosov

On va essayer de donner ici les grandes lignes de l'algorithme de M. Bestvina et M. Handel permettant de montrer que certains éléments (et en particulier $\beta_{m,n}$) sont pseudo-Anosov, en s'appuyant sur l'exemple de $\beta_{1,2}$ dans B_4 (les autres $\beta_{m,n}$ se traitant à peu près de la même façon).

Soit f un élément de $MCG(S)$, où S est une surface non sporadique.

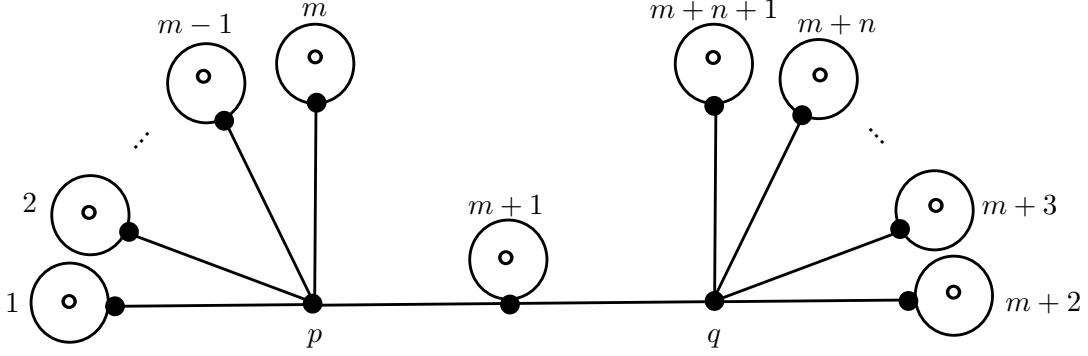


FIGURE 20 – Graphe associé à $\beta_{m,n}$

(1) La première étape consiste à trouver un graphe ayant le même type d'homotopie que la surface S et qui « supporte » l'élément f , dans le sens où l'action de f sur S peut se lire sur le graphe : on a une application \tilde{f} du graphe dans lui-même correspondant à f et qui envoie chaque sommet du graphe sur un sommet et chaque arête sur une suite d'arêtes (on peut voir le graphe comme plongé dans la surface). Pour $\beta_{m,n}$, ce graphe est composé d'un sommet par pointe p_i , plus deux sommets p et q correspondant aux centres des cercles vert et bleu de la représentation par bloc de $\beta_{m,n}$. On ajoute ensuite une arête qui boucle autour de chaque pointe, et une arête qui relie chaque i au centre du cercle correspondant (voir figure 20).

Par exemple, pour $\beta_{1,2} = \tau_1 \tau_2^{-1} \tau_3^{-1}$, on a le graphe de la figure 21. Dans cet exemple, les arêtes (orientées) du graphes sont a_1, a_2, \dots, a_9 . Cherchons par exemple l'image de a_4 par $\tilde{\beta}_{1,2}$:

- L'application induite par τ_1 laisse a_4 fixe.
- L'application induite par τ_2^{-1} envoie a_4 sur $-a_3$.
- L'application induite par τ_3^{-1} laisse $-a_3$ fixe.

Ainsi, on a $\tilde{\beta}_{1,2}(a_4) = -a_3$. On peut faire la même chose pour toutes les arêtes. Sur la partie basse de la figure 21, on a représenté les images de chaque arête par $\tilde{\beta}_{1,2}$.

(2) La deuxième étape consiste à associer à \tilde{f} une matrice représentant son action sur le graphe, dite matrice de transition.

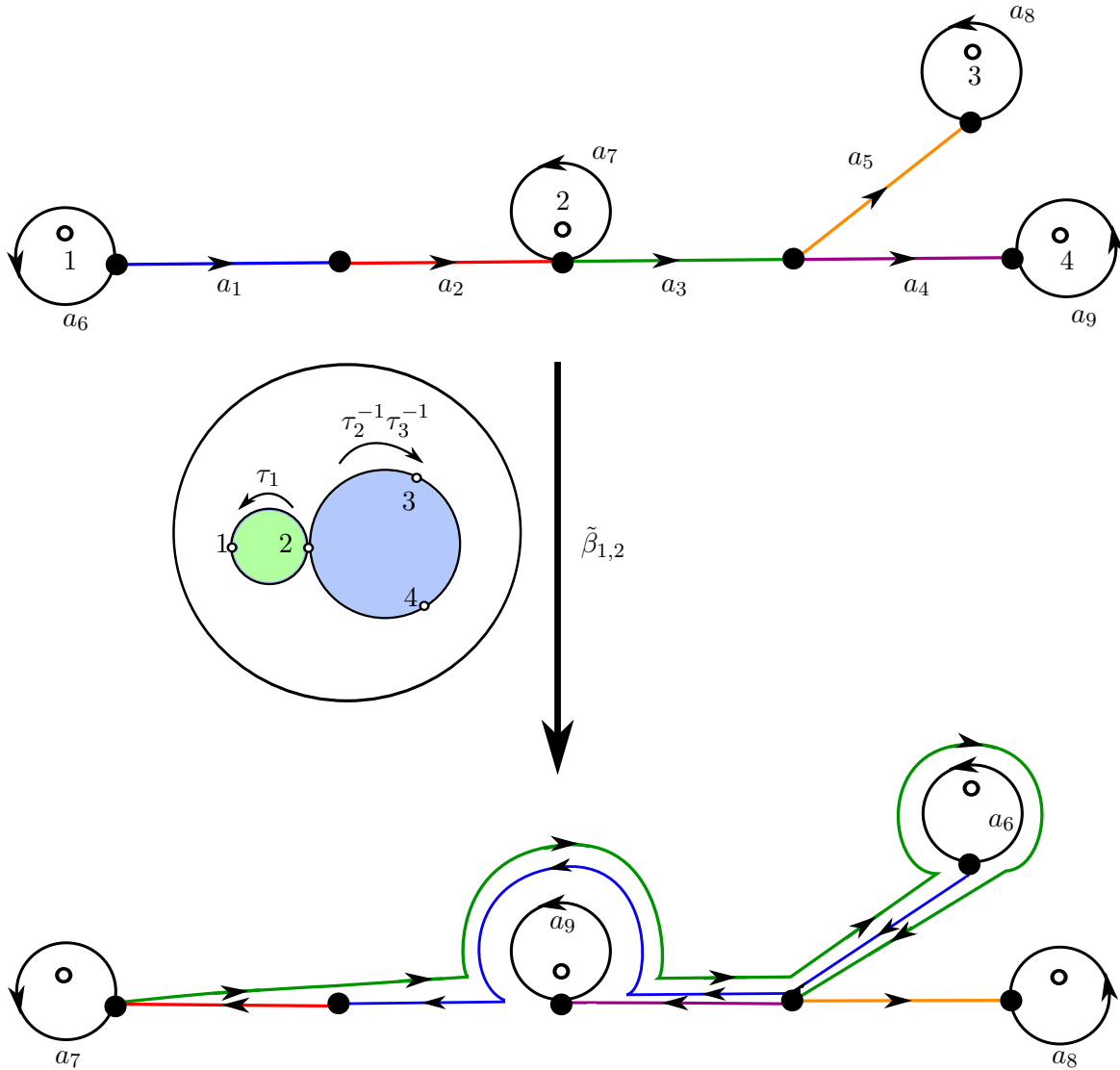


FIGURE 21 – Action de $\tilde{\beta}_{1,2}$ sur le graphe associé

Dans le cas de $\tilde{\beta}_{1,2}$, on observe que les arêtes a_6 , a_7 , a_8 et a_9 (qui font le tour de chaque point) sont simplement permutées par $\tilde{\beta}_{1,2}$. On s'intéressera à l'action de $\tilde{\beta}_{1,2}$ sur les 5 autres arêtes, dites arêtes réelles, qui ont un comportement plus significatif sous l'action de $\tilde{\beta}_{1,2}$. On construit la matrice de transition correspondant à $\tilde{\beta}_{1,2}$ de la manière suivante : on veut que la $j^{\text{ième}}$ colonne (j variant entre 1 et 5) corresponde à l'image de a_j par $\tilde{\beta}_{1,2}$. On décide alors que le coefficient (i, j) est égal au nombre de fois que $\tilde{\beta}_{1,2}(a_j)$ parcourt l'arête a_i , sans prendre en compte l'orientation. Par exemple, comme $\tilde{\beta}_{1,2}(a_4) = a_3$, la $4^{\text{ième}}$ colonne de notre matrice de transition sera $(0; 0; 1; 0; 0)$. A partir du graphe de la figure 21, on voit que la matrice de transition de

$\tilde{\beta}_{1,2}$ vaut :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Enfin, la troisième étape consiste à montrer que \tilde{f} et sa matrice de transition vérifient deux critères, (BH1) et (BH2). Si ces deux critères sont vérifiés, alors on peut en déduire que l'élément f que l'on considère est pseudo-Anosov. On va ici énoncer ces deux critères.

On a besoin pour cela des deux définitions suivantes :

Définition 25. On dit que \tilde{f} est *efficace* si pour tout $k \geq 0$, \tilde{f}^k n'a pas de retour-en-arrière : pour toute arête e du graphe, si $\tilde{f}^k(e) = e_1 e_2 \dots e_p$, où les e_j sont des arêtes du graphe, alors pour tout i compris entre 1 et $p - 1$, la dernière arête (non-orientée) parcourue par $\tilde{f}(e_i)$ est différente de la première arête parcourue par $\tilde{f}(e_{i+1})$.

Définition 26. On dira que la matrice de transition M associée à \tilde{f} est *irréductible* si pour tout (i, j) , il existe $n_{i,j} \in \mathbb{N}^*$ tel que le coefficient (i, j) de $M^{n_{i,j}}$ soit strictement positif (c'est-à-dire que $\tilde{f}^{n_{i,j}}(a_j)$ recouvre a_i).

On a alors le théorème suivant, dû à M. Bestvina et M. Handel (voir [3]) :

Théorème 3. Si \tilde{f} est telle que :

(BH1) : \tilde{f} est efficace.

(BH2) : La matrice de transition associée à \tilde{f} est irréductible, et son rayon spectral est strictement supérieur à 1.

Alors f est pseudo-Anosov.

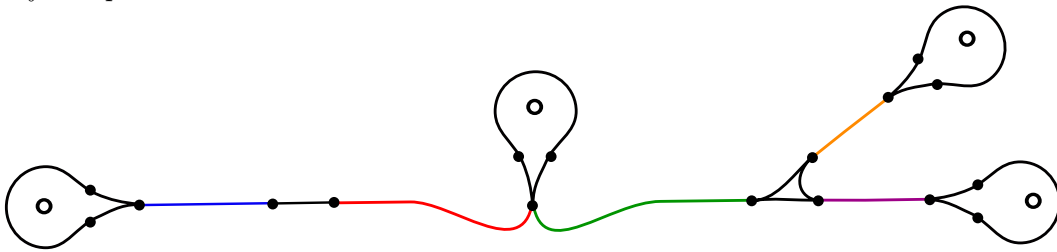


FIGURE 22 – Train-track associé au graphe de $\tilde{\beta}_{1,2}$

Idée de la preuve. La matrice de transition permet en fait de construire un « train-track » associé au graphe : chaque arête du graphe correspond à un « rail », et chaque sommet correspond à une « jonction », déterminée par la matrice de transition, et qui nous donne la façon de relier les rails entre eux (en particulier, on souhaite que deux rails arrivant sur un même sommet et qui sont parcourus l'un après l'autre par l'image d'une arête par un itéré de \tilde{f} soient reliés). Sur la figure 22, on a représenté le train-track associé au graphe de $\tilde{\beta}_{1,2}$.

Dans le cas où \tilde{f} vérifie (BH1) et (BH2), le train-track que l'on obtient permet en fait de construire un couple de feuilletages singuliers transverses mesurés (\mathcal{F}^+, μ^+) et (\mathcal{F}^-, μ^-) sur S , où chaque jonction correspond à une singularité. De plus, il existe un représentant f_0 de f tel que $f_0(\mathcal{F}^+, \mu^+) = (\mathcal{F}^+, \lambda\mu^+)$ et $f_0(\mathcal{F}^-, \mu^-) = (\mathcal{F}^-, \lambda^{-1}\mu^-)$, c'est-à-dire que f_0 dilate la surface avec un facteur λ dans la direction des feuilles de \mathcal{F}^+ et contracte la surface avec un facteur λ^{-1} dans la direction des feuilles de \mathcal{F}^- , où λ est le rayon spectral de la matrice de transition associé à \tilde{f} . Ceci montre que f est pseudo-Anosov (dans ce mémoire on ne les a pas définis comme ça, mais les éléments pseudo-Anosov du groupe modulaire sont exactement ceux qui ont un représentant qui agit de cette façon sur un couple de feuilletages mesurés, d'après le théorème de Nielsen-Thurston, voir par exemple [9]).

Dans le cas de $\beta_{1,2}$, on peut se convaincre en observant la figure 21 (ou en calculant les premiers itérés de chaque arêtes) que pour tout $k \geq 0$, $\tilde{\beta}_{1,2}^k$ n'a pas de retour en arrière, donc $\tilde{\beta}_{1,2}$ est efficace. Par ailleurs, la matrice M de transition associée à $\tilde{\beta}_{1,2}$ est irréductible (on voit que chaque arête arrive sur a_3 après au plus deux itérations de $\tilde{\beta}_{1,2}$, et l'image de a_3 recouvre toutes les arêtes sauf a_4 , qui est recouverte par l'image de a_5 , et donc par $\tilde{\beta}_{1,2}^2(a_3)$; ainsi, pour tout (i, j) , on aura un k compris entre 1 et 5 tel que le coefficient (i, j) de M^k soit non nul, donc M est irréductible). Par ailleurs, le rayon spectral de M est supérieur à 2. Ainsi, $\tilde{\beta}_{1,2}$ vérifie (BH1) et (BH2), donc $\beta_{1,2}$ est pseudo-Anosov.

Remarque. Pour $\beta_{m,n}$, on considère le graphe donné figure 20. On montre de la même façon que pour $\tilde{\beta}_{1,2}$ (avec une matrice de transition un peu plus grosse...) que $\tilde{\beta}_{m,n}$ vérifie (BH1) et (BH2), ce qui permet d'affirmer que $\beta_{m,n}$ est pseudo-Anosov.

9.3 L'élément $\beta_{m,n}$ vérifie le critère de non-trivialité

Pour montrer que le quasi-morphisme construit à partir de $\beta_{m,n}$ (comme on l'a vu dans la partie précédente) est non trivial, il reste à voir que $\beta_{m,n}$ vérifie le critère de non-trivialité (III) : il nous faut donc vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_{m,n}^k$ n'est pas conjugué à son inverse. Nous allons pour cela suivre le conseil avisé de Maxime Wolff (que nous remercions au passage!) et utiliser le morphisme d'évaluation, qui nous donnera directement le résultat voulu.

Sur le groupe libre engendré par $N - 1$ éléments $F_{N-1} = \langle \tau_1, \dots, \tau_{N-1} \rangle$, on définit le morphisme d'évaluation $f : F_{N-1} \rightarrow \mathbb{Z}$ par :

$$f\left(\prod_k \tau_i^{\alpha_k}\right) = \sum_k \alpha_k.$$

Pour tout i et j , on a :

$$\begin{aligned} f(\tau_i \tau_j (\tau_j \tau_i)^{-1}) &= 0 \\ \text{et } f(\tau_i \tau_{i+1} \tau_i (\tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1})^{-1}) &= 0 \end{aligned}$$

Ce morphisme est donc nul sur les relations de tresses : il passe au quotient en :

$$\tilde{f} : B_N \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Le morphisme \tilde{f} étant à valeurs dans \mathbb{Z} , qui est commutatif, il est stable sur les classes de conjugaison : ainsi si deux éléments a et b de B_n vérifient $\tilde{f}(a) \neq \tilde{f}(b)$, on peut en déduire que a et b ne sont pas conjugués. On évalue maintenant ce morphisme sur les puissances de $\beta_{m,n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\beta_{m,n}^k) &= \tilde{f}((\tau_1 \dots \tau_m \tau_{m+1}^{-1} \dots \tau_{m+n}^{-1})^k) \\ &= k(m-n)\end{aligned}$$

Et

$$\tilde{f}(\beta_{m,n}^{-k}) = -k(m-n).$$

On en déduit donc la propriété suivante :

Proposition 8. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si $n \neq m$, alors $\beta_{m,n}^k$ et $\beta_{m,n}^{-k}$ ne sont pas conjugués dans B_{m+n+1} .*

Corollaire. *Soient $n \neq m$ tels que $n + m + 1 = N$. Alors $\beta_{m,n}$ vérifie le critère de non-trivialité et permet donc de construire un quasi-morphisme homogène non trivial sur B_N .*

10 Deux applications

L'existence de quasi-morphismes non triviaux sur un groupe G nous donne des renseignements sur ce groupe. En particulier, cette existence permet de montrer que certaines quantités ne sont pas bornées. On s'intéresse ici à deux « normes invariantes par conjugaison » sur le groupe de tresses B_n : la longueur des commutateurs et la norme de fragmentation.

Une norme invariante par conjugaison est une application à valeurs dans \mathbb{R}^+ , qui s'annule seulement en l'élément neutre, qui vérifie l'inégalité triangulaire et qui est constante sur les classes de conjugaison (voir l'introduction de [14]). L'étude des ces « normes » est souvent utile dans l'étude du groupe considéré.

On montrera ici que la longueur des commutateurs et la norme de fragmentation ne sont pas bornées sur B_n . Notons que comme on a montré l'existence de quasi-morphismes sur B_n pour tout $n \geq 4$, on reste dans le cadre $n \geq 4$ pour ces deux applications.

10.1 Longueur des commutateurs

Soit G un groupe, et soit G' le sous-groupe de G engendré par les commutateurs : tout élément de G' s'écrit donc comme produit d'éléments du type $aba^{-1}b^{-1}$ ($a, b \in G$), et cette écriture n'est pas unique. Le nombre minimum de commutateurs nécessaires à

l'écriture d'un élément $g \in G$ s'appelle la **longueur de commutateurs** de g , et on la note $cl(g)$. On définit la **longueur stable de commutateurs** de g par :

$$scl(g) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{cl(g^n)}{n}.$$

Il y a en fait une dualité entre les quasi-morphismes non triviaux et la longueur stable des commutateurs : l'existence de quasi-morphismes non triviaux sur G équivaut à l'existence d'éléments de G ayant une longueur stable de commutateurs non nulle (voir par exemple [1], ou [6], chapitre 2).

En particulier, l'existence de quasi-morphismes non triviaux entraîne l'existence d'éléments ayant une longueur de commutateurs arbitrairement grande.

Vérifions cette affirmation dans le cas étudié dans ce mémoire :

Proposition 9. *Pour tout $n \geq 4$, la longueur des commutateurs cl n'est pas bornée sur B_n .*

Démonstration. On note G' le sous-groupe de B_n engendré par les commutateurs. Montrons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\gamma \in G'$ tel quel $cl(\gamma) \geq N$.

Soit φ l'homogénéisé d'un quasi-morphisme non trivial construit à partir d'un pseudo-Anosov dont les puissances ne sont pas conjuguées à leur inverse (par exemple $\beta_{s,t}$ avec $s + t + 1 = n$ et $s \neq t$), comme dans la partie III, et soit $D(\varphi)$ le défaut de φ .

Pour tout k -uplet (g_1, \dots, g_k) d'éléments de B_n , on a, par récurrence immédiate :

$$|\varphi(g_1 \dots g_k) - \varphi(g_1) - \dots - \varphi(g_k)| \leq (k - 1)D(\varphi).$$

Ainsi, pour tout commutateur $[a, b] \in G'$, on a :

$$|\varphi([a, b]) - \varphi(a) - \varphi(b) - \varphi(a^{-1}) - \varphi(b^{-1})| \leq 3D(\varphi).$$

Comme φ est homogène, on a, pour tout $g \in B_n$, $\varphi(g^{-1}) = -\varphi(g)$, d'où :

$$|\varphi([a, b])| \leq 3D(\varphi).$$

Si g est un produit de j commutateurs, on a donc :

$$|\varphi(g)| \leq (j - 1)D(\varphi) + 3jD(\varphi).$$

D'où :

$$|\varphi(g)| \leq (4j - 1)D(\varphi).$$

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 6. *Il existe un élément γ de G' tel que $\varphi(\gamma) \neq 0$.*

Comme φ est homogène, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(\gamma^n) = \varphi(\gamma)^n$: φ est non borné sur G' , donc j est arbitrairement grand et ainsi cl n'est pas bornée sur G' .

Preuve du lemme 6. Soit $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ le morphisme d'évaluation défini dans la section 9.3. On a :

$$Ker f = G'.$$

En effet, f s'annule sur G' , donc G' est inclus dans $Ker f$.

Réciproquement, si $g = \prod_k \tau_{i_k}^{\alpha_k} \in Ker f$, alors $\sum_k \alpha_k = 0$ (où les τ_j sont les générateurs habituels de B_n). Comme pour tout j , τ_j est conjugué à τ_1 , si on note \tilde{g} l'image de g dans l'abélianisé de B_n , on a alors $\tilde{g} = Id$, ce qui montre que $g \in G'$.

On note σ le pseudo-Anosov qui permet de construire φ . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi(\sigma^k) = ck$, où c est une certaine constante (voir la remarque à la fin de la section 7), et $f(\sigma^k) = k(s - t)$.

Soit $\tau \in G$ réductible tel que $f(\tau) = -k(s - t)$ (par exemple $\tau = \tau_1^{-k(s-t)}$) : on a alors $f(\sigma^k \tau) = 0$, donc $\sigma^k \tau \in G'$. Comme τ est réductible, $\varphi(\tau) = 0$. Par ailleurs $|\varphi(\sigma^k \tau) - \varphi(\sigma^k) - \varphi(\tau)| \leq D(\varphi)$, et on en déduit donc :

$$|\varphi(\sigma^k \tau) - ck| \leq D(\varphi).$$

Ainsi, si k est suffisamment grand ($k > \frac{D(\varphi)}{c}$), $\varphi(\sigma^k \tau)$ est nécessairement non nul : $\gamma = \sigma^k \tau$ convient. \square

Remarque. On a aussi montré la proposition suivante :

Proposition 10. *Soit G le groupe modulaire d'une surface non sporadique et soit σ un pseudo-Anosov de G tel que les puissances de σ ne sont pas conjuguées à leur inverse. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout élément périodique ou réductible $\tau \in G$, $\sigma^k \tau$ est pseudo-Anosov.*

Démonstration. Si σ est un tel pseudo-Anosov, σ permet de construire un quasi-morphisme non trivial homogène φ qui s'annule sur les éléments périodiques et réductibles et qui vaut ck sur σ^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, où c est une constante positive (comme on l'a vu dans la section 7). On a alors (de même que dans la preuve du lemme 6) :

$$|\varphi(\sigma^k \tau) - ck| \leq D(\varphi).$$

Si l'on choisit $k > \frac{D(\varphi)}{c}$, on a nécessairement $\varphi(\sigma^k \tau) \neq 0$, donc $\varphi(\sigma^k \tau)$ est pseudo-Anosov (puisque φ s'annule sur les éléments périodiques et réductibles). \square

Dans le cas du groupe de tresses, on a :

Corollaire. *Soit $n \geq 4$ et soit σ un pseudo-Anosov de B_n tel que $f(\sigma) \neq 0$, où f est le morphisme d'évaluation (défini dans 9.3). Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout élément réductible $\tau \in B_n$, $\sigma^k \tau$ est pseudo-Anosov.*

En effet, si $f(\sigma) \neq 0$, alors les puissances de σ ne sont pas conjuguées à leur inverse (d'après 9.3). \square

10.2 Norme de fragmentation

Toute tresse de B_n peut se représenter dans le cylindre $D \times [0, 1]$, où D est le disque unité sur lequel on a marqué n points. Par exemple, sur la figure 23, on a représenté le générateur σ_1 de B_3 .

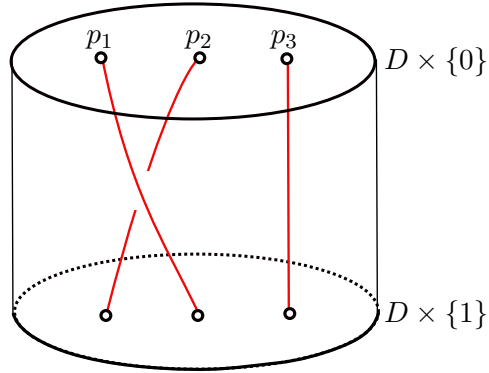


FIGURE 23 – Représentation du générateur σ_1 de B_3

Définition 27. Soit k un entier compris entre 1 et n . On dira qu'une tresse t de B_n est de *taille inférieure* à k si elle est conjuguée à un élément de B_k , où B_k est vu comme sous-groupe de B_n (engendré par les k premiers générateurs de B_n).

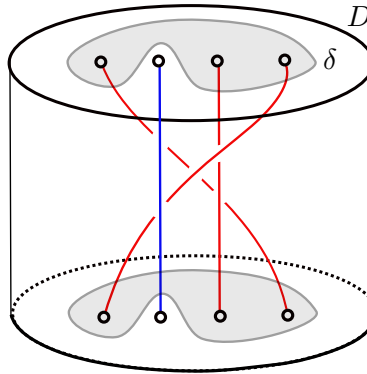


FIGURE 24 – Tresse de B_4 de taille inférieure à 3

De manière équivalente, on peut dire qu'une tresse t de B_n est de taille inférieure à k s'il existe un disque tordu δ (on appelle **disque tordu** tout sous-espace de D homéomorphe à un disque) contenant k points marqués et tel que (voir figure 24) :

1. Les brins de la tresse partant des points marqués en dehors de δ peuvent être représentés verticalement.

2. Les brins partant des k points marqués dans δ peuvent être représentés comme restant dans le cylindre $\delta \times [0, 1]$.

On remarque que si $n \geq 3$, les tresses de taille inférieure à $n - 1$ engendrent B_n : en effet on a vu que les demi-twists – qui sont de taille 2 – engendrent B_n . On dira que B_n est **fragmentable**, dans le sens où chaque élément de taille n peut s'écrire comme produit d'éléments de taille plus petite.

Définition 28. On définit alors pour tout $t \in B_n$ la *norme de fragmentation* :

$$Frag(t) = \inf\{j \in \mathbb{N}, t = t_1 \dots t_j, \text{ où } taille(t_i) \leq n - 1 \text{ pour tout } i \text{ entre } 1 \text{ et } j\}.$$

On a vu que la longueur des commutateurs n'est pas bornée sur B_n . Qu'en est-il pour la norme de fragmentation ? L'homogénéisé du quasi-morphisme que nous avons construit dans ce mémoire nous permet de montrer que $Frag$ n'est pas non plus bornée sur B_n :

Proposition 11. Pour tout $n \geq 4$, B_n n'est pas *uniformément fragmentable*, dans le sens où il n'existe aucun $k \in \mathbb{N}$ tel que tout élément de B_n puisse s'écrire comme produit d'au plus k tresses de taille inférieure à $n - 1$.

Démonstration. Notons φ l'homogénéisé du quasi-morphisme non trivial sur B_n que l'on a construit dans ce mémoire et $D(\varphi)$ son défaut.

On a $\varphi(s) = 0$ pour tout s de taille inférieure à $n - 1$ (le bord d'un disque tordu δ considéré pour définir la taille de s est une courbe essentielle de D_n fixée par s , qui est donc réductible, et on a vu (à la fin de la section 7) que φ s'annule sur tous les éléments réductibles).

Par ailleurs, comme φ est un quasi-morphisme, on a pour tous a et $b \in B_n$:

$$\varphi(ab) \leq D(\varphi) + \varphi(a) + \varphi(b).$$

On en déduit par récurrence immédiate que si t s'écrit sous la forme $t = t_1 \dots t_j$, alors :

$$\varphi(t) \leq (j - 1)D(\varphi) + \varphi(t_1) + \dots + \varphi(t_j).$$

Si les t_i sont de taille inférieure à $n - 1$, $\varphi(t_i) = 0$ pour tout i , et donc :

$$\varphi(t) \leq (j - 1)D(\varphi).$$

Comme φ est homogène, φ n'est pas borné donc on ne peut pas avoir $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in B_n$, $\varphi(t) \leq (k - 1)D(\varphi)$. Ainsi $Frag$ n'est pas bornée sur B_n : pour tout $n \geq 4$, B_n n'est pas uniformément fragmentable. \square

Références

- [1] Christophe Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) 37 (1991), no 1-2, 109-150.
- [2] Mladen Bestvina et Koji Fujiwara, *Bounded cohomology of subgroups of Mapping Class Groups*, Geom. Topol. 6 (2002), 69-89.
- [3] Mladen Bestvina et Michael Handel, *Train-tracks for surface homeomorphisms*, Topology 34 (1995), 109-140.
- [4] Brian H. Bowditch, *Tight geodesics in the curve complex*, Invent. Math. 171 (2008), no. 2, 281–300.
- [5] Robert Brooks, *Some remarks on bounded cohomology, Riemann surfaces and related topics* : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978) (Princeton, N.J.), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press (1981), pp. 53–63.
- [6] Danny Calegari, *SCL*, Mathematical Society of Japan Monographs (2009).
- [7] Danny Calegari, *The ergodic theory of hyperbolic groups* (2012).
- [8] David B.A. Epstein et Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology 36 (1997) 1275–1289.
- [9] Benson Farb et Dan Margalit, *A primer on Mapping Class Groups*, Princeton University Press (2012).
- [10] Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of a group acting on a Gromov hyperbolic space*, Proc. London Math. Soc. (3) 76 (1998) 70–94.
- [11] Eriko Hironaka et Eiko Kin, *A family of pseudo-Anosov braids with small dilatation*, Algebraic and Geometric Topology 6 (2006), 699-738.
- [12] Christian Kassel et Vladimir Turaev, *Braid Groups*, Graduate Texts in Mathematics 247, Springer (2008).
- [13] Howard A. Masur and Yair N. Minsky, *Geometry of the complex of curves I : Hyperbolicity*, Invent. Math. 138 (1999), no. 1, 103–149.
- [14] Emmanuel Militon, *Fragmentation et propriétés algébriques des groupes d'homéomorphismes*, thèse de l'université Paris-Sud XI (2012).
- [15] Saul Schleimer, *Notes on the complex of curves*, Notes from minicourse at Caltech (2005).